R

F 1509/T

49. 1987.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

SERIA TRANSPORTURI-AERONAVE

TOMUL XLIX, ANUL 1987

COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL: Prof. dr. ing. *Voicu Tache*
MEMBRII: Prof. dr. ing. *Constantin Bălă*; Conf. dr. ing. *Cornel Berbente*; Prof. dr. docent *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R. S. România; Prof. dr. ing. *Ioan Carabogdan*; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* (secretar științific); Prof. dr. docent *Virgil Constantinescu*; Prof. dr. docent *Felicia Cornea*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu*; Prof. dr. docent *Traian Demian* (redactor responsabil adjunct); Prof. dr. ing. *Octavian Floarea*; Prof. dr. ing. *Julieta Florea*; Prof. dr. ing *Nicolae Geru*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan*; Prof. dr. ing. *Moise Ienciu*; Prof. dr. ing. *Vlad Ionescu*; Prof. dr. ing. *Adelaida Mateescu*; Prof. ing. *Jean Moncea*; Prof. dr. ing *Nicolae Murguleț*; Prof. dr. docent *Florea Oprea*; Prof dr ing. *Aurel Oprean*; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu*; Prof. dr. ing. *Ion Popescu*; Conf. dr. ing. *Mircea Radeș*; Conf. dr. ing. *Sorin Rosca*; Prof. dr. ing *George Rulea*; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu*; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru*; Prof. dr. *Octavian Stănășilă*; Prof. dr. docent *Ion Teoreanu*; Prof. dr. docent *Andrei Țugulea*; Prof. dr. ing. *Silvia Vacu*; Prof. dr. docent *Rodica Vîlcu*; Academician *Radu Voinea*.

Editor: Institutul Politehnic București
Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper through ROMPRESFILATELIA, Import export press, P.O. Box 12-201, Telex 10378, Calea Griviței 62—64, Bucharest, ROMANIA

Sumar

Tatiana Stănăşilă
Generalizarea curbelor de regresie 3

Odetta Mălăncioiu
O aplicaţie concretă a modelului Lloyd-Lipow 9

Silvia Bontaş, A. Bontaş
Aplicaţii ale matricei fundamentale a unui lanţ Markov 17

Chr. Pelecudi, B. Grecu
Răspunsul modelelor dinamice ale mecanismelor cu caracteristici fundamentale (l. franceză) 23

V. Drobotă
Calculul sistemelor de bare supuse la solicitări prin şoc 29

P. Antonescu, F. Petrescu
Analiza dinamică a cleştilor mecanizaţi (l. engleză) 35

M. Oprean, P. Cizmaş, Fl. Stoenescu
Distribuţia de viteze pe conturul autovehiculului prin simulare numerică (l. engleză) 43

I. Stiharu, Carmen Alexe
Un model liniar în variabile de stare pentru dinamica longitudinală evidenţiind efectele aeroelastice datorate vibraţiilor structurii 51

V. Stanciu
O metodă raţională de profilare a paletelor treptei compresorului axial subsonic . 57

C. D. Tacă, R. Iatan, Mihaela Păunescu
Analiza experimentală a stării de tensiune din pereţii compensatoarelor lenticulare monostrat 63

R. Alboteanu, Cr. Andreescu, M. Oprean, P. Tothezan
Sistem interactiv pentru minicalculatoare utilizat la analiza ciclurilor termice din motoarele pentru autoturisme (l. engleză) 69

D. M. Ştefănescu
Captoare electrorezistive de forţe cu elemente elastice în formă de S (l. engleză) . 77

Marina Pandrea
Consideraţii asupra metodei centrului elastic 81

P. V. Marinescu
Amortizor pneumatic liniar 95

Summary

Tatiana Stănăşilă
On the Generalization of the Regression Curves 3

Odetta Mălăncioiu
A Concrete Application of the Model Lloyd-Lipow 9

Silvia Bontaş, A. Bontaş
On Some Applications of the Fundamental Matrix of a Markov Chain 17

Chr. Pelecudi, B. Grecu
The Determination of the Integral Curves for the Dynamic Models of the Mechanisms 23

V. Drobotă
Calculation of Shock Loaded Beam Systems 29

P. Antonescu, Fl. Petrescu
The Dynamic Analysis of the Mechanised Tongs 35

M. Oprean, P. Cizmaş, Fl. Stoenescu
Velocity Distribution on Autovehicle Contour through Numerical Simulation . . 43

I. Stiharu, Carmen Alexe
A Longitudina Dynames Mode in State Functions for an Elastic Airplane . . . 51

V. Stanciu
Upon a Method of Scientifical Profiling of the Subsonic Axial—Flow Compressor's Stage Blade 57

C. D. Tacă, R. Iatan, Mihaela Păunescu
Experimental Analysis of Stress in the Monolayer Walls of the Lenticular Expansion Joints 63

R. Alboteanu, Cr. Andreescu, M. Oprean, P. Tothezan
Interactive System for Minicomputers Developed for the Engine Cycles Analysis in Car Engines 69

D. M. Ştefănescu
Strain Gauge Force Transducers with S-Shaped Elastic Elements 77

Marin Pandrea
Considerations on the Method of the Elastic Centre 81

P. V. Marinescu
On a Linear Pneumatic Dampers 95

1509/T

C.Z.: 519.2

GENERALIZAREA CURBELOR DE REGRESIE

TATIANA STĂNĂŞILĂ *

În prelucrarea tabelelor de date numerice un rol important îl au curbele de regresie, care sintetizează datele respective şi sugerează tipul de evoluţie al mărimii studiate. În lucrare se introduc cilindrii şi conurile de regresie, se dau formule explicite de calcul şi se indică două aplicaţii posibile.

1. Punerea problemei. Fie o tabelă de date (numere reale)

$$\begin{array}{c|c} x & x_1 \ldots x_n \\ \hline y & y_1 \ldots y_n \end{array} \tag{1}$$

unde $x_i \neq x_j$ pentru $i \neq j$. În general o curbă dintr-o familie de curbe avînd ecuaţia $y = \varphi(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ cu $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ parametri poate să nu treacă prin punctele $M_i(x_i, y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, adică sistemul $\varphi(x_i, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) - y_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$ să nu fie compatibil. În practică se consideră suficient ca $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ să fie aleşi astfel încît suma de pătrate

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) - y_i]^2 \tag{2}$$

să fie minimă; o condiţie necesară impusă acestor parametri este

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_j} = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p. \tag{3}$$

În ipoteza că acest sistem admite o soluţie $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_p^0$, se obţine o „curbă de regresie"

$$C_0 : y = \varphi(x, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_p^0), \tag{4}$$

al cărei grafic mediază între punctele M_i asociate tabelei (1), ca în figura 1. În cazul particular al curbelor $y = \lambda_1 x + \lambda_2$, se regăseşte *dreapta de regresie* a tabelei (1).

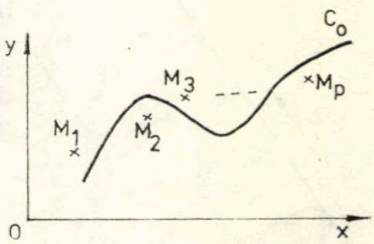


Fig. 1

O aplicaţie tipică a curbelor de regresie o constituie *predicţia* valorilor; anume, dacă la tabela (1) se adaugă noi valori pentru linia I-a a tabelei $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}$, atunci din ecuaţia (4) a lui C_0 se pot "prezice"

* Lector dr., catedra Matematici I

MUSZAKI EGYETEM

valorile $y_{n+p} = \varphi(x_{n+p}, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_p^0)$, $1 \leqslant p \leqslant k$. Metoda celor mai mici pătrate este utilizată la rezolvarea aproximativă a unor sisteme liniare „mari" de forma

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\lambda_j = b_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k, \tag{5}$$

presupuse supradeterminate ($k > p$). Acest caz corespunde situaţiilor cînd pentru determinarea a p mărimi $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ se fac mult mai multe observaţii decît numărul mărimilor. Cazul cel mai des întîlnit este cel în care rangul matricei $A = (a_{ij})$ a coeficienţilor sistemului este maxim, egal cu p. Bineînţeles, sistemul este în general incompatibil şi atunci se pune problema găsirii unor valori $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_p^0$ pentru care

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij}\lambda_j - b_i)^2 = \min.$$

Să notăm cu $f_1, \ldots, f_p$ vectorii-coloană k-dimensionali ai matricii A,

$$A = (f_1 | \ldots | f_p) \text{ şi fie } b = (b_1, \ldots, b_k)^T.$$

Atunci $$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij}\lambda_j - b_i)^2 = \| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i - b \|^2,$$

relativ la norma euclidiană din $\mathbb{R}^k$. Aşa cum se ştie, minimul acestei expresii este atins pentru coeficienţii Fourier adică pentru acele valori $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_p^0$ pentru care

$$\langle b, f_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^0 f_i, f_j \rangle, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p. \tag{6}$$

Acest sistem este compatibil determinat deoarece $\det(\langle f_i, f_j \rangle) \neq 0$ (conform liniar independenţei vectorilor f_j).

Metoda celor mai mici pătrate admite unele extinderi (îndeosebi în cazul studiului corelaţiei variabilelor aleatoare sau în probleme de aproximare în spaţiile Hilbert de tip L_2). Ne vom ocupa în cele ce urmează de o altă extindere, pe care o socotim remarcabilă. Anume, să considerăm un „nor de date" m-dimensionale, reprezentate printr-o mulţime de n puncte din spaţiul

$$\mathbb{R}^m (m \geqslant 1), \; M_1, \ldots, M_n \text{de coordonate}$$
$$M_i (x_1^i, \ldots, x_m^i). \tag{7}$$

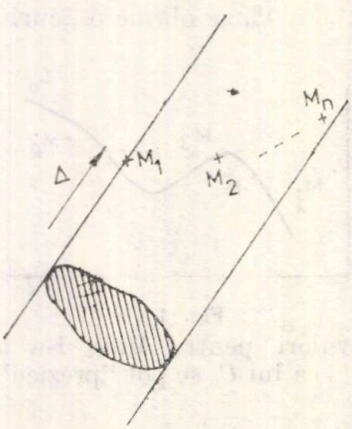


Fig. 2

Atunci pentru orice direcţie Δ se poate considera „cilindrul drept" cu axa paralelă cu Δ, circumscris norului de date, numit *cilindrul de regresie asociat datelor* (7) *şi direcţiei* Δ (figura 2).

De asemenea, fiind dat un punct fixat $C(c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{R}^m$, se poate considera conul drept cu vîrful în C circumscris norului, numit *conul de regresie* asociat.

În paragraful următor ne propunem să explicităm obţinerea ecuaţiei unor astfel de entităţi geometrice. O astfel de extindere poate fi utilizată pentru predicţii în condiţiile datelor multidimensionale.

2. Conuri şi cilindri de regresie

Începem cu cazul plan ($m = 2$). Dintre toate dreptele care trec printr-un punct $C(c_1, c_2)$ ne propunem să alegem pe cea mai apropiată (în medie pătratică) de punctele $M_i(x_i, y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ date de tabela (1). Ecuaţia dreptei căutate este $y - c_2 = \lambda(x - c_1)$, cu λ nedeterminat şi ca atare, considerăm sistemul liniar supradeterminat asociat $(x_i - c_1)\lambda = y_i - c_2$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Cu notaţiile anterioare,

$$b = \begin{pmatrix} y_1 - c_2 \\ \vdots \\ y_n - c_2 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = \begin{pmatrix} x_1 - c_1 \\ \vdots \\ x_n - c_1 \end{pmatrix}$$

şi din sistemul (6) se obţine

$$\lambda^0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - c_1)(y_i - c_2)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - c_1)^2}$$

Dreapta $y - c_2 = \lambda^0(x - c_1)$ poate fi numită *axa* conului de regresie cu vîrful în C.

În mod similar, cilindrul de regresie are axa, o dreaptă de ecuaţie $y = \lambda_1^0 x + \lambda_2^0$. Procedînd ca mai sus ,considerăm sistemul liniar supradeterminat $x_i\lambda_1 + \lambda_2 = y_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. În acest caz

$$b_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad f_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Din sistemul (6) deducem $\langle b, f_1 \rangle = \langle \lambda_1^0 f_1 + \lambda_2^0 f_2, f_1 \rangle$ şi $\langle b, f_2 \rangle = \langle \lambda_1^0 f_1 + \lambda_1^0 f_2, f_2 \rangle$, de unde

$$\lambda_1^0 = \frac{1}{\Delta}(nC - A_1B_1), \qquad \lambda_2^0 = \frac{1}{\Delta}(A_2B_1 - CA_1) \text{ şi } \Delta = nA_2 - (A_1)^2;$$

am notat $A_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $B_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $A_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $C = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Considerăm acum cazul general m — dimensional. Considerăm n puncte $M_i(x_1^i, \ldots, x_m^i) \in \mathbb{R}^m$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Fie $C(c_1, \ldots, c_m)$ un punct fixat. Considerăm o dreaptă trecînd prin C

$$\frac{x_1 - c_1}{\lambda_1} = \frac{x_2 - c_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{x_m - c_m}{\lambda_m}$$

sau presupunînd $\lambda_1 = 1$ (ceea ce nu restrînge generalitatea),

$$(x_1 - c_1)\lambda_r = (x_r - c_r), \qquad 2 \leqslant r \leqslant m.$$

Vectorul director optim $\vec{\Delta} = (1, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$ este cel pentru care

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{r=2}^{m} [(x_i^i - c_1)\,\lambda_r - (x_r^i - c_r)]^2 = \min.$$

Pentru a aplica formula (6) să observăm că în acest caz $p = m - 1$ şi $k = n(m-1)$; apoi

$$b = (x_2^1 - c_2, \ldots, x_2^n - c_2;\quad x_3^1 - c_3, \ldots, x_3^n - c_3;$$
$$x_m^1 - c_m, \ldots, x_m^n - c_m)^T;$$

$$f_1 = (x_1^1 - c_1, \ldots, x_1^n - c_1;\quad 0, \ldots,;\quad \ldots, 0)^T$$

$$f_2 - (0, \ldots, 0;\quad x_1^1 - c_1, \ldots, x_1^n - c_1;\quad \ldots, 0)^T$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{m-1} = (0, \ldots, 0, \ldots;\ x_1^1 - c_1, \ldots, x_1^n - c_1)^T.$$

Formulele (6) dau în acest caz

$$\lambda_r^0 = \frac{1}{A}\langle b, f_r\rangle, \qquad 2 \leqslant r \leqslant m, \qquad \text{unde } A = \sum_{i=1}^{n} (x_1^i - c_1)^2.$$

În cazul cilindrului de regresie, problema se pune într-un mod similar, căutînd o dreaptă optimală relativ la norul de date

$$D : \frac{x_1 - z_1}{1} = \frac{x_2 - z_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{x_m - z_m}{\lambda_m}$$

cu necunoscutele $z_1, \ldots, z_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Aşadar,

$$(x_1 - z_1)\lambda_r - (x_r - z_r) = 0, \qquad r \leqslant 2 \leqslant m \text{ şi}$$

$$g(\lambda_1, \ldots, r_m, z_1, \ldots, z_m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=2}^{m} [(x_1^i - z_1)\,\lambda_r = (x_r^i - z_r)]^2 = \min.$$

Condiția necesară este $\frac{\partial g}{\partial \lambda_r} = 0$,

$2 \leqslant r \leqslant m$ și $\frac{\partial g}{\partial z_s} = 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant m.$

Se obține un sistem liniar care se tratează ca mai sus.

În locul unor drepte, se pot căuta varietăți liniare în $\mathbb{R}^m$ de regresie. Principial problema este aceeași.

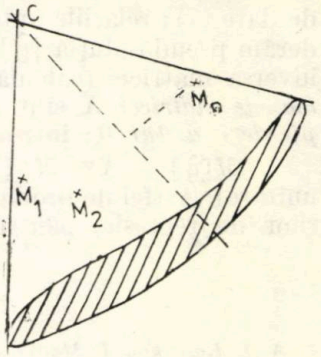


Fig. 3

De asemenea, pentru un „nor de date" (7) se pot căuta *hipersuprafețe de regresie* $x_m = (x_1, \ldots, x_{m-1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p)$. punînd condiții de tipul

$$\sum_{i=1}^{m} [x_m^i - \varphi(x_1^i, \ldots, x_{m-1}^i, \lambda_1, \ldots, \lambda_p]^2 = \min.$$

3. Aplicații

a) *O problemă de optim.* Presupunem date matrici $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ și un scalar real $k \geqslant 0$. Se poate pune *problema minimizării funcționalei*

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \Phi(X) = X^t X + kX^t AX = X^t(I_n + kA)X$$

cu legătura $BX = b$ (A se presupune pozitiv definită).

Matricea $I_n + kA$ este pozitiv definită deci inversa ei se descompune sub forma $C.C^t$ cu C inferior triunghiulară. Problema precedentă se reduce la a găsi minimul expresiei $\|C^{-1}X\|$ cu restricția $BX = b$; punînd $Y = C^{-1}X$, *avem de minimizat* $\|Y\|$ *cu restricția* $DY = b$, unde $D = BC$.

Așadar, problema inițială revine la a găsi vectorii cu normă minimă situații într-o varietate liniară dată. Soluția acestei probleme este binecunoscută, cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate și al pseudoinversei; anume $Y_{min} = D^{\#}.b$. În cazul cînd B are rangul maxim, avem $D^{\#} = D^T(DD^T)^{-1}$.

b) *O aplicație în statistică.* Fie (Ω, K, P) un cîmp de probabilitate și $\xi \in L^2(\Omega)$ o variabilă aleatoare avînd medie și dispersie. Să presupunem că media $M\xi$ este o combinație liniară de m variabile $x_1, \ldots, x_m$ (zise regresori) adică $M\xi = \sum_{k=1}^{m} \theta_k x_k$ unde coeficienții θ_k sînt supuși estimărilor pe baza observării valorilor lui ξ. Pentru n selecții de valori ale lui ξ corespund valori $\xi_1, \ldots, \xi_n$ pentru variabila aleatoare ξ; anume $\xi_i = \sum_{k=1}^{m} x_{ik}\theta_k$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Este pusă în evidență o matrice $X=(x_{ik})$ de tip

$n \times m$, ale cărei linii pot fi asimilate cu puncte din $\mathbb{R}^m$, amintind de norul de date (7); relaţiile anterioare se pot scrie matricial $[\xi] = X.[\theta]$. Considerăm pseudosoluţia $[\hat{\theta}] = X^*.\ \xi$ a acestui sistem, unde X^* este pseudoinversa matricei (calculată cu metoda celor mai mici pătrate). *Dacă coloanele matricei* X *sînt liniar independente, atunci* $\hat{\theta}$ *este o estimare fără pierderi a lui* θ; într-adevăr,

$M[\hat{\theta}] = X^*\ M[\xi] = X^*\ X[\theta] = I_m.\theta = \theta$ (I_m fiind matricea unitate). Astfel de probleme se pot reformula în cazul cilindrilor sau conurilor de regresie, pentru varietăţile liniare tangente etc.

BIBLIOGRAFIE

1. *A. I. Kostrikin, I. Manin*, Lineinaia alghebra i gheometria, (l. rusă), Nauka, 1986.
2. *G. I. Marciuk*, Metode de analiză numerică. Ed. Academiei R. S. România, 1983.

On the Generalization of the Regression Curves

The numerical tables are currently synthetized by regression curves, which suggest the kind of the evolution of the studied numerical functions. In this work the regression cylinders and cones are introduced and some explicit formulas and applications are given.

C.Z. : 159.2

O APLICAȚIE CONCRETĂ A MODELULUI LLOYD-LIPOW

ODETTA MĂLĂNCIOIU *

În lucrare se sugerează un model fizic pentru creșterea fiabilității. Se folosește metoda verosimilității maxime în determinarea estimatorilor pentru R_∞ și p. Acești estimatori tind să aibă dispersie minimă.

În vederea stabilirii unui regim optim de așchiere pe strunguri automate s-a făcut apel la un procedeu bazat pe un calcul din teoria probabilităților.

După ce pe baze tehnologice, se stabilește un anumit regim de așchiere, se trece la executarea unui prim lot de piese. Dintre acestea, se ia un număr de piese care este controlat și în urma controlului se stabilește numărul pieselor care se încadrează în toleranțele impuse. În același timp se obțin informații pentru modificarea parametrilor care concură la stabilirea regimului de așchiere, urmărindu-se îmbunătățirea lui ; astfel se pot modifica : adîncimea de așchiere, duritatea tăișului cuțitului de strung, compoziția lichidului de răcire, viteza de rotație a piesei etc.

Apoi se execută un nou lot de piese și se procedează în mod asemănător, repetîndu-se operația de un număr de k ori. Se obține astfel un număr N de etape de prelucrare, în fiecare etapă se consideră un anumit număr de piese prelucrate și singurele date care se înregistrează sînt dacă piesele se încadrează sau nu în limitele de toleranță prescrise cu o fiabilitate fixată ; dacă piesele se încadrează în limitele de toleranță se consideră „succes", în caz contrar se consideră „defect".

Rezultatele fiecărei etape de prelucrare sînt folosite în scopul îmbunătățirii procesului de prelucrare din etapa următoare.

Cînd a N-a etapă de prelucrare a fost parcursă, ne propunem să ajustăm o curbă de creștere la cele N grupe de date succes-defectare. Pentru cel de al k-lea grup de date luate în ordine se consideră n_k piese prelucrate, din care S_k sînt succese observate.

Pentru ilustrare, alegem ca funcție de creștere

$$R_k = R_\infty - \frac{p}{k}$$

unde R_k este fiabilitatea fixată pe durata etapei k de prelucrare, iar R_∞ este valoarea limită a fiabilității care ar fi atinsă dacă $k \to \infty$. Probabi-

* Lector, catedra Matematici

litatea p fiind strict pozitivă, modifică rata creșterii care este „hiperbolică" în acest caz.

În cele ce urmează ne propunem să găsim estimatori pentru R_∞ și p folosind metoda verosimilității maxime.

Ținînd seama de repartiția binomială, rezultă probabilitatea P_k de a avea S_k succese din n_k piese prelucrate, pentru etapa k

$$P_k = C_{n_k}^{S_k} R_k^{S_k} (1 - R_k)^{n_k - S_k} \tag{1}$$

Întrucît rezultatele fiecărei etape de prelucrare sînt statistic independente, rezultă funcția de verosimilitate

$$P = \prod_{k=1}^{N} P_k = \prod_{k=1}^{N} C_{n_k}^{S_k} R_k^{S_k} (1 - R_k)^{n_k - S_k} \tag{2}$$

Deci

$$\mathscr{P} = \ln P = \ln \prod_{k=1}^{N} C_{n_k}^{S_k} + \sum_{k=1}^{N} S_k \ln \left(R_\infty - \frac{p}{k} \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} (n_k - S_k) \ln \left(1 - R_\infty + \frac{p}{k} \right) \tag{3}$$

Ecuațiile de verosimilitate se obțin anulînd derivatele parțiale de ordinul întîi ale lui $\mathscr{P}$ în raport cu R_∞ și p.

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial R_\infty} = \sum \frac{S_k}{R_\infty - \frac{p}{k}} - \sum \frac{n_k - S_k}{1 - R_\infty + \frac{p}{k}} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial p} = - \sum \frac{\frac{S_k}{k}}{R_\infty - \frac{p}{k}} + \sum \frac{\frac{n_k - S_k}{k}}{1 - R_\infty + \frac{p}{k}} = 0 \tag{5}$$

Se prelucrează ecuațiile de mai sus și se obține

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial R_\infty} = \sum \frac{\frac{S_k}{n_k} - \left(R_\infty - \frac{p}{k} \right)}{\frac{1}{n_k} \left(R_\infty - \frac{p}{k} \right) \left(1 - R_\infty + \frac{p}{k} \right)} = 0 \tag{4'}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} = -\sum \frac{\frac{1}{k}\frac{S_k}{n_k} - \left(R_\infty - \frac{p}{k}\right)\frac{1}{k}}{\frac{1}{n_k}\left(R_\infty - \frac{p}{k}\right)\left(1 - R_\infty + \frac{p}{k}\right)} = 0 \qquad (5')$$

Rezolvarea ecuaţiilor (4') şi (5') fiind dificilă, se propune o rezolvare prin încercări şi eroare. Valorile iniţiale ale lui p şi R_∞ se obţin presupunînd că

$$1 - R_\infty \ll \frac{p}{k} \leqslant 1$$

Apoi se înlocuieşte n_k cu $\bar{n}$, unde $\bar{n} = \frac{1}{N}\sum n_k$.

Întrucît $R_\infty - \frac{p}{k} \approx R_\infty$ şi $1 - \left(R_\infty - \frac{p}{k}\right) \approx \frac{p}{k}$, termenul rămas la numitor din sumele de mai sus este $\frac{p}{k}$.

Se obţin ecuaţiile

$$\frac{1}{n}\sum kS_k = \frac{N(N+1)}{2} R_\infty - pN \qquad (6)$$

$$\frac{1}{n}\sum S_k = NR_\infty - p\sum \frac{1}{k} \qquad (7)$$

a căror soluţii constituie estimatorii $\hat{p}$ şi $\hat{R}_\infty$ prin metoda verosimilităţii maxime

$$\hat{p} = \frac{\frac{1}{\bar{n}}\left(\sum k\,S_k - \frac{N+1}{2}\sum S_k\right)}{\frac{N+1}{2}K - N} \qquad (8)$$

$$\hat{R}_\infty = \frac{\frac{1}{\bar{n}}\left(\frac{K}{N}\sum k\,S_k - \sum S_k\right)}{\frac{N+1}{2}K - N} \qquad (9)$$

unde $K = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \approx \ln\left(N + \frac{1}{2}\right) + c$, $c \approx 0{,}577215$ (constanta lui Euler).

E x e m p l u, Rezultatele a 15 etape de prelucrare sînt date în tabelul 1.

Tabelul 1

k	n_k	S_k	kS_k	S_k/n_k
1	8	5	5	0,625
2	6	4	8	0,667
3	8	5	15	0,625
4	7	4	16	0,571
5	8	6	30	0,750
6	10	7	42	0,700
7	8	6	42	0,750
8	8	7	56	0,875
9	9	6	54	0,667
10	7	6	60	0,867
11	8	6	66	0,750
12	8	8	96	1,000
13	9	7	91	0,777
14	8	6	84	0,750
15	8	7	105	0,875
$N = 15$	$\bar{n} = \frac{1}{15} \sum n_k = 8$	$\sum_{k=1}^{15} S_k = 90$	$\sum_{k=1}^{15} kS_k = 770$	

Cu datele din acest tabel se găsește constanta $K \approx 3{,}31805$ și se calculează estimatori pentru R_∞ și p, folosind ecuațiile (8) și (9).

Rezultă $\hat{p}^0 \approx 0.541$, $\hat{R}_\infty^0 \approx 0{,}869$.

Deci se obțin valorile :

$\hat{R}_1 \approx 0{,}328$, $\hat{R}_2 \approx 0{,}598$, $\hat{R}_3 \approx 0{,}688$, $\hat{R}_4 \approx 0{,}732$, $\hat{R}_5 \approx 0{,}761$

$\hat{R}_6 \approx 0{,}778$, $\hat{R}_7 \approx 0{,}792$, $\hat{R}_8 \approx 0{,}801$, $\hat{R}_9 \approx 0{,}809$, $\hat{R}_{10} \approx 0{,}815$

$\hat{R}_{11} \approx 0{,}820$, $\hat{R}_{12} \approx 0{,}824$, $\hat{R}_{13} \approx 0{,}828$, $\hat{R}_{14} \approx 0{,}831$, $\hat{R}_{15} \approx 0{,}833$

Alura curbei $\hat{R}_k$ suprapusă curbei S_k/n_k este dată din fig. 1.

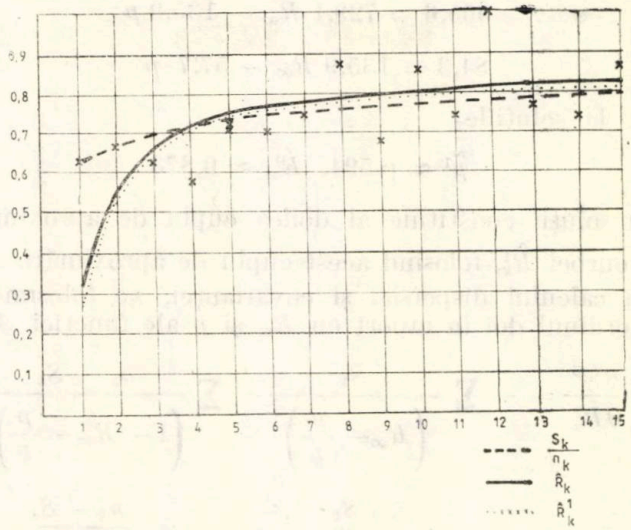


Fig. 1

Evaluînd numitorii din ecuațiile (4') și (5') folosind valorile inițiale $\hat{p}^0$ și $\hat{R}^0_\infty$ găsite, se obțin iterativ noi valori îmbunătățite ale parametrilor căutați, folosind ecuațiile (6) și (7).

Ecuațiile de estimare rezultate sînt

$$\sum \frac{k S_k}{D_k n_k} = R_\infty \sum \frac{k}{D_k} - p \sum \frac{1}{D_k} \qquad (4'')$$

$$\sum \frac{S_k}{D_k n_k} = R_\infty \sum \frac{1}{D_k} - p \sum \frac{1}{k D_k} \qquad (5'')$$

unde

$$D_k = \frac{k}{n_k}\left(\hat{R}_\infty - \frac{\hat{p}}{k}\right)\left(1 - \hat{R}_\infty + \frac{\hat{p}}{k}\right)$$

Se obțin pentru numitor următoarele valori:

$D_1 \approx 0{,}027$, $D_2 \approx 0{,}08$, $D_3 \approx 0{,}08$, $D_4 \approx 0{,}112$, $D_5 \approx 0{,}114$

$D_6 \approx 0{,}103$, $D_7 \approx 0{,}144$, $D_8 \approx 0{,}159$, $D_9 \approx 0{,}155$, $D_{10} \approx 0{,}212$

$D_{11} \approx 0{,}203$, $D_{12} \approx 0{,}216$, $D_{13} \approx 0{,}205$, $D_{14} \approx 0{,}245$, $D_{15} \approx 0{,}216$

$\sum \frac{kS_k}{D_k n_k}$	$\sum \frac{k}{D_k}$	$\sum \frac{1}{D_k}$	$\sum \frac{S_k}{n_k D_k}$	$\sum \frac{1}{kD_k}$
555,6	729,1	135,9	84,3	57,7

Ecuaţiile (4″) şi (5″) devin respectiv

$$555{,}6 = 729{,}1\, R_\infty - 135{,}9\, p$$

$$84{,}3 = 135{,}9\, R_\infty - 57{,}7\, p$$

care conduc la soluţiile

$$\hat{p}^1 \approx \text{p,}594, \quad \hat{R}^1_\infty \approx 0{,}873$$

Aceste soluţii constituie al doilea cuplu de aproximări.

Alura curbei $\hat{R}^1_k$, folosind acest cuplu de aproximări, este în fig. 1

Pentru calculul dispersiei şi covarianţei, ne folosim de derivatele parţiale de ordinul doi în raport cu R_∞ şi p ale funcţiei $\mathscr{P}$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial R_\infty^2} = -\sum \frac{S_k}{\left(R_\infty - \frac{p}{k}\right)^2} - \sum \frac{n_k - S_k}{\left(1 - R_\infty - \frac{p}{k}\right)^2} \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial p^2} = -\sum \frac{\frac{S_k}{k^2}}{\left(R_\infty - \frac{p}{k}\right)^2} - \sum \frac{\frac{n_k - S_k}{k^2}}{\left(1 - R_\infty + \frac{p}{k}\right)^2} \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial R_\infty \partial p} = \frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial p \partial R_\infty} = \sum \frac{\frac{S_k}{k}}{\left(R_\infty - \frac{p}{k}\right)^2)} + \sum \frac{\frac{n_k - S_k}{k}}{\left(1 - R_\infty + \frac{p}{k}\right)^2} \tag{13}$$

Valorile estimate ale derivatelor parţiale de ordinul doi le notăm

$$\frac{\partial^2 \mathscr{P}^*}{\partial R_\infty^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathscr{P}^*}{\partial p^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathscr{P}^*}{\partial R_\infty \partial p}.$$

Aceste valori estimate se calculează, luînd de exemplu $\hat{p}^1 \approx 0{,}59$, $\hat{R}^1_\infty \approx$ $\approx 0{,}87$, care se înlocuiesc în ecuaţiile (11), (12), (13) şi folosind datele tabelului 1, rezultă

$$\frac{\partial^2 \mathscr{P}^*}{\partial R_\infty^2} = -\,784{,}9, \qquad \frac{\partial^2 \mathscr{P}^*}{\partial p^2} = -\,91{,}1, \qquad \frac{\partial^2 \mathscr{P}^*}{\partial R_\infty \partial p} = 171{,}9$$

Se ia ordinea parametrilor R_∞, p şi se scrie matricea

$$H = \begin{pmatrix} -\,784{,}9 & 171{,}9 \\ 171{,}9 & -\,91{,}1 \end{pmatrix}$$

unde $\det H = 50954{,}8$.

Prin urmare

$$-H^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}00178 & 0{,}00335 \\ 0{,}00335 & 0{,}0153 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^2\hat{R}_\infty^* & \text{Cov}^*(\hat{R}_\infty, \hat{p}) \\ \text{Cov}^*(\hat{R}_\infty, \hat{p}) & D^2\hat{p}^* \end{pmatrix}$$

Deoarece fiabilitatea $\hat{R}_k$ este dată de relația $\hat{R}_k = \hat{R}_\infty - \frac{\hat{p}}{k}$, rezultă dispersia lui $\hat{R}_k$

$$D^2\hat{R}_k^* = D^2\hat{R}_\infty^* + \frac{1}{k^2} D^2\hat{p}^* - \frac{2}{k} \text{Cov}^*(\hat{R}_\infty, \hat{p}) \tag{14}$$

sau

$$D^2\hat{R}_k^* = 0{,}00178 + \frac{1}{k^2} 0{,}0153 - \frac{2}{k} 0{,}00335 \tag{14'}$$

γ fiind coeficientul de încredere, un interval de încredere pentru R_k este dat de

$$P(-K_{1-\gamma} < \frac{\hat{R}_k - R_k}{\sqrt{D^2\hat{R}_k^*}} < K_{1-\gamma} \approx \gamma$$

O limită de încredere inferioară cu coeficientul de încredere γ se calculează din relația

$$\hat{R}_{I,K} = \hat{R}_k - K_{1-\gamma}\sqrt{D^2\hat{R}_k^*} \tag{15}$$

Se ia coeficientul de încredere $\gamma = 0{,}91$ și se găsește în tabele $K_\alpha = 1{,}3$. Se ține seama că $\hat{p}_1 = 0{,}59$, $\hat{R}_\infty^1 = 0{,}87$ și se obține tabelul 2 de valori.

Alura curbei $\hat{R}_k$ pentru toate valorile date mai sus este dată de fig. 2. Cu datele tabelului 2 se obține alura curbei estimatorului de maximă verosimilitate a lui $\hat{R}_k$ cu o limită 91% de încredere inferioară.

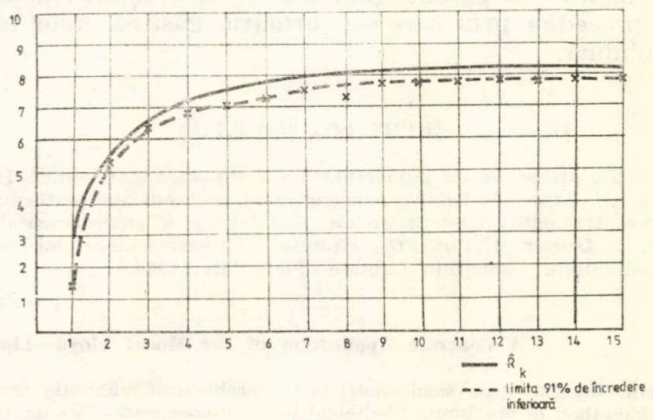


Fig. 2

Tabelul 2

k	$\hat{R}_k$	$D^2\hat{R}_k^*$	$\hat{R}_{I,K}$
1	0,28	0,01038	0,1474
2	0,58	0,00223	0,5189
3	0,68	0,00125	0,6345
4	0,72	0,00094	0,6802
5	0,75	0,00102	0,7086
6	0,77	0,00111	0,7271
7	0,80	0,00113	0,7563
8	0,80	0,00118	0,7358
9	0,80	0,00120	0,7549
10	0,81	0,00126	0,7638
11	0,82	0,00130	0,7732
12	0,82	0,00133	0,7732
13	0,82	0,00135	0,7753
14	0,83	0,00138	0,7793
15	0,83	0,00140	0,7819

Concluzii

Prin metoda verosimilității maxime, folosind iterații succesive, s-au obținute estimatori ai parametrilor curbei de creștere; de asemenea, s-a propus un procedeu prin care s-a urmărit găsirea unor estimatori cu dispersie minimă.

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Iosifescu, Gh. Mihoc*, Teoria probabilităților și statistică matematică, Ed. tehnică, 1966
2. *D. K. Lloyd, M. Lipow*, Reliability : management, methods and mathematics, 1964.
3. *J. S. Balaban*, Reliability Growth Models, The Journal of environmental sciences, 1978
4. *C. Târcolea, D. Drimer, A. Paris, O. Mălăncioiu*, Utilizarea modelului Duane în creșterea fiabilității, Conferința Calitate—Fiabilitate, 1986.

A Concrete Application of the Model Lloyd—Lipow

One suggests a physical model to the problem of reliability growth. One uses the method of maximum likelihood to determine estimators for the parameters R_∞ and p. These estimators tend to have smallest variances.

C.Z. : 519.217.2
519.688

APLICAȚII ALE MATRICEI FUNDAMENTALE A UNUI LANȚ MARKOV

SILVIA BONTAȘ, A. BONTAȘ *

Lucrarea modelează matematic ciclul de prelucrare al unei piese și aplică la acest model rezultatele teoretice privind studiul mișcării unui lanț Markov pînă la absorbție. Un rol esențial în studiul acestei mișcări revine matricei fundamentale a lanțului, o serie de mărimi (de exemplu : media timpului de absorbție, probabilitățile de absorbție, media numărului de vizite într-o stare tranzientă pînă la absorbție, etc.) putînd fi exprimate în termenii acestei matrice. Se dă un exemplu numeric prelucrat pe calculator împreună cu interpretarea rezultatelor obținute.

1. Introducere

Lanțurile Markov omogene constituie modelul matematic al evoluțiilor probabilistice care păstrează asupra trecutului lor numai amintirea cea mai recentă și a căror lege condiționată este invariantă în timp. Proprietatea Markov și respectiv omogenitatea, care formalizează aceste atribute, permit elaborarea a o serie de rezultate.

O categorie de lanțuri Markov omogene o constituie lanțurile Markov absorbante, caracterizate de proprietatea că toate stările lor recurente sînt absorbante. În cadrul analizei lanțurilor Markov absorbante prezintă interes o serie de variabile aleatoare cum ar fi : numărul de apariții ale unei stări tranziente fixate pînă la absorbție, numărul de pași pînă la absorbție, starea în care are loc absorbția etc. Un rol esențial în studiul variabilelor aleatoare enumerate revine matricei fundamentale a lanțului, o serie de mărimi putînd fi exprimate în termenii acestei matrice (vezi [2], [3]).

Lucrarea modelează matematic ciclul de prelucrare al unei piese și aplică la acest model rezultatele teoretice privind studiul mișcării unui lanț Markov pînă la absorbție. Se dă un exemplu numeric prelucrat pe calculator împreună cu interpretarea rezultatelor obținute.

2. Rezultate teoretice utilizate

Fie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un lanț Markov finit și omogen, cu mulțimea de stări S. Se spune că două stări i și j *comunică* dacă se poate trece din una în alta într-un număr finit de pași (i.e. există n, $m \in \mathbb{N}$ astfel încît $p_{ij}^{(n)} > 0$ și $p_{ji}^{(m)} > 0$). Stările unui lanț Markov pot fi grupate în *clase*, după criteriul comunicării, astfel : două stări care comunică între ele aparțin aceleiași clase ; o stare care nu comunică cu nici o altă stare formează o clasă. Evident clasele sînt submulțimi disjuncte ale mulțimii de stări S. O proprietate definită pe mulțimea stărilor se numește *proprietate de clasă* dacă îndeplinirea sa de către o stare a unei clase implică îndeplinirea sa de către toate stările clasei respective.

O stare i se numește *tranzientă* dacă are proprietatea că poate trece într-o altă stare, fără a mai putea însă reveni din acea stare în starea inițială (i.e. există $j \in S$ și $n \in \mathbb{N}$ astfel încît $p_{ij}^{(n)} > 0$ iar $p_{ji}^{(m)} = 0$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$). O stare care nu este tranzientă se numește *recurentă*. Intuitiv,

printr-o stare recurentă lanțul poate trece de o infinitate de ori. Tranziența și recurența sînt proprietăți de clasă. Se numește *clasă ergodică* o clasă care nu mai poate fi părăsită odată ce s-a intrat în ea. O stare care formează singură o clasă ergodică se numește *absorbantă*. O stare absorbantă i are proprietatea că $p_{ii} = 1$.

Un lanț Markov se numește *absorbant* dacă toare stările sale recurente sînt absorbante. În acest caz matricea sa de trecere are *forma canonică* :

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Q & T \end{bmatrix}$$

unde Q reprezintă matricea de trecere din stările tranziente în cele absorbante iar T reprezintă matricea de trecere între stările tranziente.

Fie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un lanț Markov absorbant, j o stare tranzientă a sa și fie ν_j variabila aleatoare care reprezintă numărul de apariții ale lui j. Se definesc variabilele aleatoare u_j^k, $k \geqslant 0$, care contorizează aparițiile stării j, prin :

$$u_j^k = \begin{cases} 1 & \text{dacă } X_k = j \\ 0 & \text{dacă } X_k \neq j \end{cases}$$

Evident $\nu_j = \sum_{k\geqslant 0} u_j^k$ și prin urmare

$$E_i(\nu_j) = E_i \sum_{k\geqslant 0} 1 \cdot P_i(X_k = j) + 0 \cdot P_i(X_k \neq j)) = \sum_{k\leqslant 0} p_{ij}^{(k)} \qquad (2.1.)$$

unde P_i reprezintă probabilitatea în cazul în care repartiția inițială este *concentrată* în starea i (i.e. $p_j = \delta_{ij}$ pentru orice $j \in S$), deci în cazul în care lanțul pleacă din starea i, iar E_i reprezintă valoarea medie calculată în raport cu probabilitatea P_i. Se demonstrează că mărimile $E_i(\nu_j)$ sînt finite.

Relația (2.1.) se mai poate scrie matriceal :

$$(E_i(\nu_j))_{i,j\in T} = \sum_{k\geqslant 0} T^k = (I - T)^{-1} \qquad (2.2)$$

Matricea $N = (I - T)^{-1}$ se numește *matricea fundamentală* a lanțului Markov absorbant considerat. Elementele sale n_{ij} reprezintă deci numărul mediu de vizite în starea tranzientă j înainte de absorbție, dacă lanțul pleacă din starea i.

Cu ajutorul matricei fundamentale se pot calcula momentul de ordinul 2 și dispersia variabilei aleatoare ν_j. Se demonstrează că mărimile $E_i(\nu_j^2)$ sînt finite și

$$N_2 = (E_i(\nu_j^2))_{i,j\in T} = N(2\,N_{dg} - I) \qquad (2.3)$$

unde N_{dg} reprezintă matricea care se obține din N egalînd cu zero elementele din afara diagonalei principale.

Rezultă că dispersiile sînt date de :

$$D^2 = (E_i(\nu_j^2) - E_i^2(\nu_j))_{i,j\in T} \qquad (2.4)$$

Tot cu ajutorul matricei fundamentale se pot calcula probabilitățile, notate f_{ij}, ca lanțul să ajungă în starea j plecînd din starea tranzientă i, astfel :

$$F = (_j)f_{ii,j\in T} = (N - I)N_{dg}^{-1} \qquad (2.5)$$

Fie ν variabila aleatoare care reprezintă timpul pe care lanțul îl petrece în mulțimea T. Evident $\nu = \sum_{j \in T} \nu_j$. Variabila ν se numește *timp de absorbție*. Vectorul valorilor medii ale timpului de absorbție, notat $m = (m_i)_{i \in T}$, este dat de

$$m = (E_i(\nu))_{i \in T} = Ne \tag{2.6}$$

unde e este vectorul unitate.

Se definesc *probabilitățile de absorbție* în diverse stări absorbante, notate a_{ik}, ca fiind probabilitățile ca, plecînd din starea tranzientă i, lanțul să ajungă în starea absorbantă k. Are loc relația:

$$A = (a_{ik})_{i \in T,\ k \in S-T} = NQ \tag{2.7}$$

3. Modelul matematic al ciclului de prelucrare al unei piese

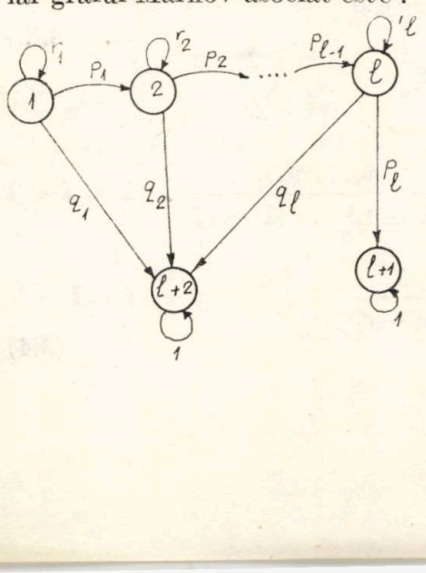
Să presupunem că pentru obținerea unei piese se parcurg l etape de prelucrare, de durate eventual diferite, pe care le considerăm de o unitate de timp (mărimea duratei unei etape nu influențează modelul). Trecerea de la o etapă la alta se decide în urma controlului de calitate. După etapa i piesa poate corespunde calitativ și deci poate trece la următoarea etapă de prelucrare cu probabilitatea p_i, poate prezenta defecte remediabile și deci trebuie supusă din nou aceluiași tip de prelucrare cu probabilitatea r_i, sau poate fi declarată rebut și deci eliminată din ciclul de prelucrare cu probabilitate q_i, $p_i + r_i + q_i = 1$. Se construiește un lanț Markov considerînd ca stări ale lanțului diversele etape în care se poate afla piesa pe parcursul prelucrării. Există $l + 2$ stări:

starea i — piesa se află în etapa i de prelucrare, $i = \overline{1, l}$
starea $l + 1$ — piesa a devenit produs finit
starea $l + 2$ — piesa a devenit rebut

Matricea de trecere a lanțului este:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ l \\ l+1 \\ l+2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & l & l+1 & l+2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} r_1 & p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & r_2 & p_2 & \dots & 0 & 0 & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_l & p_l & q_l \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

iar graful Markov asociat este:



Lanțul Markov considerat este absorbant, avînd stările $l + 1$ și $l + 2$ absorbante și stările 1, ..., l tranziente. Forma canonică a matricei sale de trecere este:

$$P = \begin{array}{c} \\ l+1 \\ l+2 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ l \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} l+1 & l+2 & 1 & 2 & \dots & l \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & q_1 & r_1 & p_1 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_l & q_l & 0 & 0 & \dots & r_l \end{array}\right] \end{array}$$

deci rezultă :

$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ l-1 \\ l \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \dots & l-1 & l \end{array} \\ \begin{bmatrix} r_1 & p_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{l-1} & p_{l-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_l \end{bmatrix} \end{array} \text{ și } Q = \begin{bmatrix} 0 & q_1 \\ 0 & q_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & q_{l-1} \\ p_l & q_l \end{bmatrix}$$

Utilizînd relaţiile (2.2) —(2.7) se obţine pentru orice $i, j \in \overline{1, l}$:

$$n_{ij} = E_i(\nu_j) = \begin{cases} \dfrac{p_i \dots p_{j-1}}{(1-r_i)\dots(1-r_j)} & i < j \\ \dfrac{1}{1-r_i} & i = j \\ 0 & i > j \end{cases} \tag{3.1}$$

$$E_i(\nu_j^2) = \begin{cases} \dfrac{p_i \dots p_{j-1}}{(1-r_i)\dots 1-r_j)} \dfrac{1+r_j}{1-r_j} & i < j \\ \dfrac{1+r_i}{(1-r_i)^2} & i = j \\ 0 & i > j \end{cases} \tag{3.2}$$

$$f_{ij} = \begin{cases} \dfrac{p_i \dots p_{j-1}}{(1-r_i)\dots(1-r_{j-1})} & i < j \\ r_i & i = j \\ 0 & i > j \end{cases} \tag{3.3.}$$

şi pentru orice $i \in \overline{1, l}$:

$$m_i = E_i(\nu) = \sum_{j=1}^{l} n_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r_i} + \sum\limits_{j=1}^{l} \dfrac{p_i \dots p_{j-1}}{(1-r_i)\dots(1-r_j)}, & 1 \leqslant i < l \\ \dfrac{1}{1-r_l} & i = l \end{cases} \tag{3.4}$$

$$a_{i,\,l+1} = \frac{p_i \dots p_l}{(1 - r_i) \dots (1 - r_l)}$$
$$a_{i,\,l+2} = 1 - a_{i,\,l+1} \tag{3.5}$$

4. Programul LAMAB

Programul LAMAB (vezi Anexa) realizează calculul matricei fundamentale și a celorlalte mărimi, prezentate în paragraful 2, care se obțin cu ajutorul acestei matrice.

Datele de intrare sînt :

NR — numărul de stări tranziente ale lanțului

NC — numărul de stări absorbante ale lanțului

$T(NR, NR)$ — matricea de trecere între stările tranziente

$Q(NR, NC)$ — matricea de trecere din stările tranziente în cele absorbante

Matricele T și Q sînt dimensionate (20,20) și respectiv (20,15) cu posibilitatea măririi cu ușurință a acestei dimensiuni.

Programul calculează mărimile cerute după formulele (2.2.) — (2.7), deci se poate aplica la orice lanț Markov absorbant, nu numai la cazul particular prezentat, pentru care s-au obținut formulele de calcul (3.1.) — (3.5).

Pentru inversarea matricei $I - T$ s-a folosit o subrutină care se bazează pe metoda Gauss-Jordan de inversare a unei matrice.

Programul LAMAB afișează atît datele de intrare (matricele T și Q) cît și matricele calculate : matricea fundamentală N, matricea momentelor de ordinul 2 — N_2, matricea dispersiilor D^2, matricea F, vectorul timpilor medii de absorbție m și matricea probabilităților de absorbție A.

Pentru testarea programului s-a considerat următorul exemplu numeric.

5. Exemplu numeric

Să presupunem că piesa considerată este un arbore care urmează un ciclu de prelucrare constituit din patru etape : 1) prelucrare preliminară (forjare), 2) prelucrare mecanică (strunjire), 3) tratament termic (călire, revenire), 4) finisare (rectificare). Să presupunem că matricea de trecere a lanțului Markov considerat este :

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}80 & 0 & 0 & 0 & 0{,}10 \\ 0 & 0{,}20 & 0{,}75 & 0 & 0 & 0{,}05 \\ 0 & 0 & 0{,}15 & 0{,}75 & 0 & 0{,}10 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}10 & 0{,}85 & 0{,}05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Din forma canonică a lui P rezultă ca și în cazul general:

$$T = \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}80 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}20 & 0{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}15 & 0{,}75 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}10 \end{bmatrix} \text{ și } Q = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}10 \\ 0 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}10 \\ 0{,}85 & 0{,}05 \end{bmatrix}$$

Aplicînd programul LAMAB se obțin rezultatele prezentate în Anexă. Eroarea de calcul este de ordinul 10^{-3} și apare în urma inversării matricei $I - P$ și a rotunjirii valorilor cu mai mult de 3 zecimale .

Interpretarea rezultatelor obținute. Elementele n_{ij} ale matricei fundamentale reprezintă timpul mediu în care piesa se află în etapa j de prelucrare înainte de a deveni fie produs finit, fie rebut, dacă piesa își începe ciclul de prelucrare din etapa i. Elementele de sub diagonala principală sînt nule deoarece piesa nu poate trece într-o etapă de prelucrare inferioară celei în care se află. Se observă că valorile pe linii descresc de la stînga la dreapta, deci cu cît piesa înaintează pe parcursul ciclului de prelucrare cu atît acești timpi medii sînt mai mici.

Se observă că N_2 diferă destul de mult de D^2, deci mediile nu sînt destul de sigur estimate.

Elementele f_{ij} ale matricei F reprezintă probabilitatea ca o piesă aflată în etapa i de prelucrare să ajungă în etapa j. Se observă că $f_{ii} \ll f_{ij}$, $i > j$, deoarece este mult mai probabil ca piesa să treacă într-o nouă etapă de prelucrare decît să mai fie odată supusă aceluiași tip de prelucrare.

Elementele m_i ale vectorului m reprezintă durata medie de prelucrare pînă se obține fie produsul finit, fie un rebut, dacă piesa se află inițial în etapa i. Cu cît piesa se află într-o etapă mai avansată de prelucrare, cu atît media acestei durate este mai mică.

Mărimile $a_{i,i+1}$ și $a_{i,i+2}$ reprezintă probabilitățile ca piesa aflată în etapa i de prelucrare să devină produs finit și respectiv rebut. Cu cît ciclul de prelucrare evoluează, probabilitatea de a se obține produsul finit este mai mare, iar de a se obține rebuturi, mai mică.

BIBLIOGRAFIE

1. *K. L. Chung*, Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Berlin, Springer, 1967.
2. *M. Iosifescu*, Lanțuri Markov finite și aplicații, Ed. Tehnică, București 1977.
3. *J. G. Kemeny, J. L. Snell*, Finite Markov Chains, Princeton, Van Nostrand, 1960.

On Some Applications of the Fundamental Matrix of a Markov Chain

A mathematical model for the manufacture cycle of a machine part and some applications to this model of the theoretical results related to the movement study of a Markov chain before absorption are given in the paper. An essential role in studying this movement is played by the fundamental matrix of the chain, some random variables (e. g. mean time of absorption, probabilities of absorption, mean value of the number of visits in a transient state before absorption, etc.) being able to be expressed in terms of this matrix. A numerical example processed by computer programming and an interpretation of the results are given.

C.Z. : 621.8 02

LA RÉPONSE DES MODÈLES DYNAMIQUES DES MÉCANISMES AVEC DES CARACTÉRISTIQUES FONDAMENTALES

CHR. PELECUDI, B. GRECU *

L'oeuvre s'occupe de la réponse des modèles dynamiques qui ont les caractéristiques inertiales et mécaniques fondamentales. Le moment d'inertie varie périodiquement avec le déplacement, aussi que le moment du couple réduit, mais celui-ci, le deuxième, est représenté par des fonctions linéaires ou quadratiques par rapport à la vitesse. La réponse dynamique est déterminée sur des diagrammes-types à l'aide du calculateur. Là, on présente des diagrammes comparatifs et des observations sur ceux-ci. Enregistrer la réponse dynamique de ces caractéristiques fondamentales est intéressant pour remarquer le comportement et pour projeter le réglage automatique.
Mot clef. Réponse dynamique ; modèles ; méthodes numériques ; fonctions approximatives ; équations nonlinéaires.

Introduction

Pour les mécanismes et les machines avec un seul degré de mobilité, le mouvement peut être étudié sur des modèles dynamiques, disque en rotation ou particule matérielle avec une trajectoire circulaire. Les paramètres géométriques et cinématiques correspondent à ceux de l'élément dirigéant ou respectivement à un point de celui-ci. Les paramètres inertiels, le moment d'inertie réduit ((I_*) ou la masse réduite (m_*), résultés par l'équivalence d'énérgies cinétiques ont toujours des valeurs positives mais ils deviennent variables périodiquement par rapport ou déplacement (φ ou s). Les actions mécaniques, les couples (M_*) ou les forces réduites (F_*) déterminées par l'équivalence des chocs mécaniques, ont une variabilité périodique en fonction du déplacement et presque linéaire ou quadratique en fonction de vitesse (ω ou v). L'équation du mouvement pour le modèle disque dérivé de la loi d'énergie est non-linéaire et a la forme :

$$\omega \cdot I_*(\varphi) \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}I_*(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = M_*(\varphi,\ \omega, t)$$

On exclut de cette étude, la dépendance par rapport au temps de M_*.

* Professeur dr. ing. ; Lecteur dr. ing., Chaire de mécanismes

L'équation de mouvement du modèle dynamique avec des tailles sans dimension

On considère la coordonnée de position et la première dérivée par rapport au temps de celle-ci comme étant de tailles sans dimension, notées x et y, cet-à-dire

$$x = \varphi/k_\varphi\,; \quad y = \omega/k_\omega$$

Les paramètres dynamiques, le moment d'inertie réduit et le couple de moment réduit ont les expressions :

$$J(x) = I_*(\varphi)/k_I\,; \quad P(x, y) = M_*(\omega, \varphi)/k_M$$

Les coefficients de proportionalité ont des unités de mesure comme les tailles réelles.

L'équation de mouvement du modèles dynamique avec des tailles sans dimension gardent la même forme comme dans le cas des taille réelles, c'est-à-dire :

$$y \cdot J(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y^2}{2} \cdot \frac{dJ(x)}{\mathrm{d}x} = kP(x,\ y)$$

ont le facteur global k sans dimension

$$k = k_M k\varphi/k_I k_2^\omega$$

Si on utilise le coefficient échelle numérique k_t pour la variable temps, $\tau = t/k_t$, parmi les tailles sans dimension vitesse et déplacement on établit la relation

$$y = k \cdot \mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau$$

Caractéristiques fondamentales

Le couple de moment réduit est considéré variable par rapport à la position et à la vitesse saous la forme

$$P(x, y) = M(x) + KM(y)$$

et le moment d'inertie réduit, sous la forme

$$J(x) = I + I(x)$$

où K et I sont des constantes positives, $I \gg |I(x)|$.

Dans la phase de régime la fonction $P(x, y)$ est périodique, $P = P(x)$, mais dans les périodes de départ et d'arrêt elle est quadratique, $P = P(y)$.

On considère la caractéristique mécanique $M(y)$ comme étant donnée par des combinaisons des fonctions linéaires ou quadratiques sous la forme des caractéristiques fondamentales, fig. 1. DS-droite simple enclinée ; DP-droite rompue avec concavité positive ; CP - courbe avec concavité positive ; DN — droite rompue avec concavité négative ; CN —

— courbe avec concavité négative ; *DH* — droite horizontale rompue avec une inclinaison négative.

La caractéristique inertiale $I(x)$ et mécanique $M(x)$ sont représentées par des fonctions périodiques par rapport au déplacement, fig. 2 : *D* — fonction rectangulaire ; *R* — fonction rampe ; *P* — fonction pente ; *T* — fonction triangulaire ; *A* — fonction harmonique. Pour la représentation normale où s'associe celles-ci, l'indice α et β pour la représentation dephasée. La caractéristique fondamentale la plus défavorable est donnée par la fonction *D*, mais la plus favorable par la fonction *A*, celles-ci représentant deux extrèmes l'une avec de grandes discontinuités et l'autre avec des continuités supérieures. Les fonctions périodiques fondamentales ont des amplitudes unitaires et la période de deux unités. Il est possible que les périodes réelles pour $I(x)$ et $M(x)$ soient différentes, la première correspondant au cicle cinématique, et l'autre au cicle dynamique, et pour elle on admet la période de quatre unités aussi.

Les constantes *I* et *K* marquent l'importance des composantes $M(y)$ et *I* par rapport aux composantes $M(x)$ et $I(x)$.

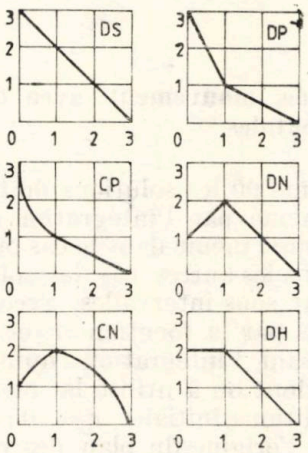


Fig. 1 — Caractéristiques fondamentales $M(y)$

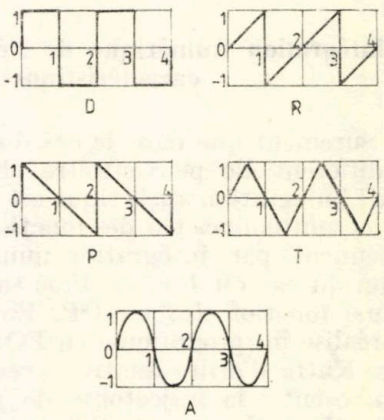


Fig. 2 — Caractéristiques fondamentales $I(x)$, $M(x)$

L'équation de mouvement pour le modèle avec des caractéristiques fondamentales

L'équation de mouvement du modèle avec des caractéristiques sans dimension peut être écrite sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k[M(x) + KM(y)] - \frac{y^2}{2} \cdot \frac{dI(x)}{dx}}{[I + I(x)] \cdot y}$$

et représente en même temps l'équation différentielle de la trajectoire de phase.

En choisissant convénablement le coefficient de proportionalité k_t on peut obtenir le coefficient $k = 1$.

On considère les fonctions $\alpha(\alpha_i)$, $\beta(\beta_i)$, $\gamma(\gamma_m)$ dans lesquelles α_i sont les fonctions D, R, P, T, A sous la forme normale, ou des fonctions composées par celles-ci ; β_i sont les même fonctions mais sous des phases forme ; γ_m sont des fonctions fondamentales pour la caractéristique $M(y)$. Par rapport à celles-ci la réponse dynamique est determinée sur des diagrammes-types en résultant des formes spécifiques pour l'équation de mouvement. Le diagramme 00 définit par $I(x) = 0$; $M(x) = 0$; le diagramme $+11$ pour lequel $I(x)$ et $M(x)$ sont des fonctions α_i ; le diagramme ± 11 pour lequel $I(x)$ est une fonction α_i, et $M(x)$ est une fonction β_i ; le diagramme -11 pour lequel $I(x)$ et $M(x)$ sont des fonctions β_i ; le diagramme ∓ 11 pour lequel $I(x)$ este une fonction β_i, mais $M(x)$ est une fonction. α_i.

Par conséquent, pour le modèle dynamique avec des caractéristiques fondamentales résultent cinq courbes intégrales pour les mêmes valeurs des constantes I et K. En s'associant une notation dans laquelle interviennent les symboles des fonctions qui précisent les caractéristiques $I(x)$, $M(x)$, $M(y)$ on peut determiner la réponse dynamique pour des modèles sous la forme : DD—DS ; RR—DS ; PP—DS ; TT—DS ; AA—DS ; DD—DP ; RR—DP, etc.

L'intégration numérique de l'équation de mouvement avec des caractéristiques fondamentales

Surement que dans le cas du diagramme 00 les solutions de l'équation différentielle peuvent-être obtenues même par l'intégration analytique. L'intégration analytique est possible aussi même dans le cas ou $I(x)$ et $M(x)$ sont donnés par des fonctions D. Dans les autres cas les solutions s'obtiennent par intégration numérique sur sous-intervalles, avec l'exception du cas où $I(x)$ et $M(x)$ sont donnés par la fonction A et $M(y)$ par une fonction DS ou CP. En généralisant l'intégration numérique on a réalisé un programme en FORTRAN dont on a utilisé la méthode, Runge-Kutta d'ordre quatre. Avec les conditions initiales $x = 0$; $y = 0$ qui imposent à la trajectoires de poser par l'origine du plan des phases, résulte $(dy/dx)_0 \to \infty$ et $P(0, 0) = 0$, c'est-à-dire la caractéristique du mouvement $y(x)$ est tangente à l'axe Oy en origine. L'augmentation de vitesse y est ainsi très rapide par rapport au déplacement x, ainsi que l'intégration numérique qui se réalise par l'inversion de l'équation différentielle jusqu'a ce que l'augmentation de vitesse soit comparable à l'augmentation du déplacement x.

Dans les points de discontinuité du moment d'inertie il y a des discontinuités qui appartiennent à la vitesse. Les vitesses à droite et à gauche sont liées par la relation

$$y_{i+0} = y_{i-0} \sqrt{J_{i-0}/J_{i+0}}$$

Les résultats numériques obtenus ont été transposés en représentations graphiques.

On détermine l'accélération $z = dy/d\tau$ parce que la caractéristique $y(x)$ est connue. En analysant la réponse dynamique dans le diagramme 00 on constate que toutes les caractéristiques $y(x)$ asymptotique aspirent à

la valeur $y = 3$ quand $x \to \infty$, la convergence plus rapide étant donnée par les fonctions CN, DS (fig. 3).

L'augmentation du coefficient K dirigé vers la réduction de la période du départ pendant que l'augmentation du coefficient I dirige vers l'augmentation de la phase du départ. La réponse dynamique dans les diagrammes $+11$; ± 11 ; -11 ; ∓ 11 met en évidence la variation de la vitesse sur intervalles et la discontinuité de celle-ci dans les points de discontinuité du moment d'inertie.

Par exemple en analysant la réponse du modèle dynamique avec les caractéristiques DD—DS, $I = 2$, $K = 1$ (fig. 4) on observe que la vitesse

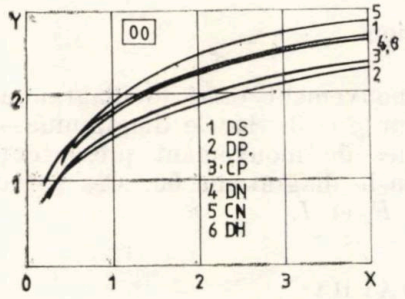
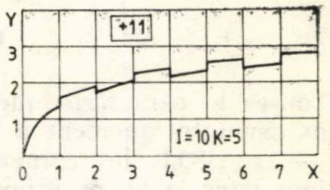
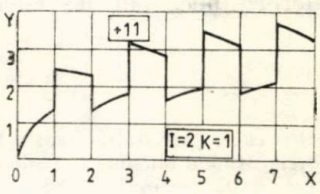
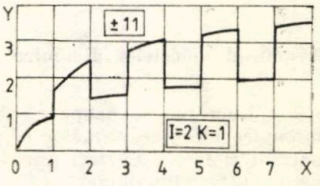
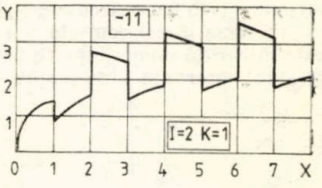


Fig. 3 — Caractéristiques de mouvement dans le diagramme OO









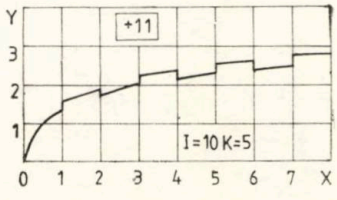


Fig. 5 — Caractéristique de mouvement dans le diagramme $+11$ pour les modèles $DD—DS$, $I=10$, $K=5$

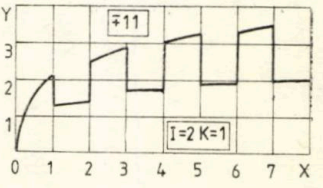


Fig. 4 — La réponse des modèles dynamiques $DD—DS$, $I=2$, $K=1$

y augmente sur les intervalles impairs du diagramme $+11$ et sur les intervalles paires du diagramme -11, mais elle est décroissante sur les intervalles paires du diagramme $+11$ et sur les intervalles impaires du diagramme -11. Dans les diagrammes ± 11 la vitesse augmente tant sur les intervalles paires que sur ceux impaires. Les sauts de vitesse augmentent et se stabilisent dans la phase de régime. L'augmentation de la partie constante du moment d'inertie I et du coefficient K dans le même rapport K/I, conduit à la diminution des sauts de vitesse (fig. 5) et même à disparition de ceux-ci, en retrouvant le diagramme 00.

Conclusion

Toutes le caractéristiques de mouvement dans le diagramme 00 aspirent asymptotiquement à la valeur $y = 3$. Sur le diagramme $+11$; ± 11; -11; ∓ 11, les caractéristiques de mouvement présentent des variations dans le même rapport avec le diagramme 00. Ces variations sont determinées par les coefficients K et I.

BIBLIOGRAPHIE

1. *Chr. Pelecudi*, Precizia mecanismelor, Ed. Acad. R.S.R., București, 1975.
2. *B. Grecu*, Studiul dinamic al variatorului cu bare articulate și roți dințate, Teză de doctorat, București, 1985.
3. *I. I. Artobolevskii, B. C. Loscinin*, Dinamika mașinih agregatov, Izd. Nauka, 1977.

Răspunsul modelelor dinamice ale mecanismelor cu caracteristici fundamentale

Lucrarea se ocupă cu determinarea curbelor integrale pentru modelele dinamice ale mecanismelor cu un singur grad de mobilitate în condițiile unor parametri mecanici dați prin forme tipizate; dreptunghiulară (D), rampă (R), pantă (P), triunghiulară (T), armonică (A), dreaptă simplă înclinată (DS), dreaptă frîntă cu — concavitate negativă (DN), cu concavitate pozitivă (DP), cu palier (DN), curbă cu concavitate negativă (CN), cu concavitate pozitivă (CP).

Ecuația diferențială a mișcării scrisă cu mărimi relative adimensionale este integrată numeric pe tipuri de diagrame, valorile fiind transpuse în grafice. Rezultă observații utile asupra studiului mișcării în condiții reale de funcționare.

C.Z. : 621.42

CALCULUL SISTEMELOR DE BARE SUPUSE LA SOLICITĂRI PRIN ȘOC

V. DROBOTĂ *

În prezenta lucrare se stabilesc relațiile pentru calculul sistemelor de bare drepte sau curbe, static determinate sau nedeterminate plane sau spațiale, supuse la solicitări prin șoc.

1. Ipoteze de calcul

La stabilirea relațiilor necesare pentru calculul sistemelor de bare plane sau curbe, static determinate sau nedeterminate, supuse la solicitări prin șoc, se fac următoarele ipoteze :

1) Se admite valabilitatea teoremei lui Clapeyron după care lucrul mecanic produs de sarcinile aplicate ce produc șocul (L) se regăsește în energia de deformație a sistemului de bare care preia șocul (U).

2) Sistemul de bare care preia șocul se consideră alcătuit din materiale liniar elastice și este solicitat în domeniul elastic ;

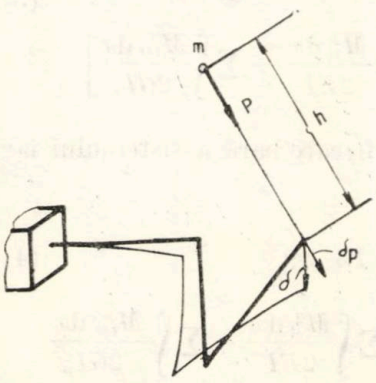
3) Dacă șocul este produs prin ciocnire atunci ciocnirea se consideră plastică ;

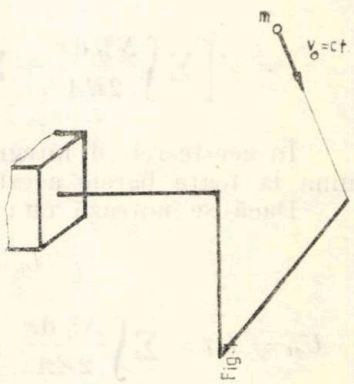
4) Nu se ia în considerare masa sistemului de bare care preia șocul ;

5) Șocul se consideră :

— produs de o masă m asupra căreia acționează o sarcină P ce se deplasează cu viteza inițială nulă, vectorii $\bar{v}$ și $\bar{P}$ având același suport și sens cu vectorul de poziție al deplasării $\bar{h}$ (fig. 1).

— produs de o masă m ce se deplasează cu o viteză constantă $\bar{v}_0$ al cărei suport întîlnește sistemul de bare (fig. 2).





← Fig.1 Fig.2 →

* Conf. dr. ing., catedra Rezistența materialelor

2. Relații de calcul

Aceste ipoteze se traduc prin următoarele relații între tensiunile, deplasările și eforturile ce se produc în sistemul ce preia șocul și cele ce se produc dacă sarcinile aplicate sistemului sînt aplicate static, respectiv

$$\delta = \psi\delta_{st}\,;\quad \sigma = \psi\sigma_{st}\,;\qquad \varphi = \psi\varphi_{st}\,;\quad \tau = \psi\tau_{st}\,;$$
$$N = \psi N_{st}\,;\quad T = \psi T_{st}\,;\qquad M = \psi M_{st}\,;\quad M_t = \psi M_{tst} \tag{1}$$

unde

ψ este un coeficient dinamic (multiplicatorul de impact)

δ, φ, σ, τ — deplasările liniare respectiv unghiulare și tensiunile normale respectiv tangențiale produse în sistem datorită sarcinilor ce produc șocul;

δ_{st}, φ_{st}, σ_{st}, τ_{st} — aceleași mărimi pentru sarcini aplicate static;

N, T, M, M_t — eforturile produse în sistem datorită sarcinilor ce produc șocul.

N_{st}, T_{st}, M_{st}, $M_{t\,st}$ — aceleași mărimi în sistem datorită acelorași sarcini aplicate static.

2.1. Sisteme de bare solicitate prin șoc cu o sarcină P (fig. 1).

Pentru sistemul de bare drepte din figură lucrul mecanic produs de sarcina P ce acționează asupra masei m este

$$L = P(h + \delta_P) \tag{2}$$

în care h este distanța parcursă de sarcina P pînă la contactul cu sistemul de bare;

δ_P — proiecția vectorului de poziție al deplasării sistemului după contactul cu sarcina pe direcția sarcinii P;

Energia de deformație acumulată de sistemul de bare este

$$U = \Sigma\int\frac{N^2\mathrm{d}x}{2EA} + \Sigma\int\frac{T^2\,\mathrm{d}x}{2GA} + \Sigma\int\frac{M^2\mathrm{d}x}{2EI} + \Sigma\int\frac{M_t^2\,\mathrm{d}x}{2GI_p} = \tag{3}$$

$$= \psi^2\left[\Sigma\int\frac{N_{st}^2\,\mathrm{d}x}{2EA} + \Sigma\int\frac{T_{st}^2\,\mathrm{d}x}{2GA}\int + \Sigma\frac{M_{st}^2\mathrm{d}x}{2EI} + \Sigma\int\frac{M_{tst}\,\mathrm{d}x}{2GI_p}\right]$$

În aceste relații, integralele se referă la fiecare bară a sistemului iar suma la toate barele acestuia

Dacă se notează cu:

$$L_0 = Ph\,;\qquad 2L_{st} = P\delta_{stP}\,; \tag{4}$$

$$U_{st} = L_{st} = \Sigma\int\frac{N_{st}^2\,\mathrm{d}x}{2EA} + \Sigma\int\frac{T_{st}^2\,\mathrm{d}x}{2GA} + \Sigma\int\frac{M_{st}^2\,\mathrm{d}x}{2EI} + \Sigma\int\frac{M_{tst}^2\,\mathrm{d}x}{2GI_p} \tag{5}$$

din teorema lui Clapeyron rezultă

$$L_0 + 2\psi L_{st} = \psi^2 L_{st}\,; \quad \psi^2 - 2\psi - \frac{L_0}{L_{st}} = 0$$

din care se obține

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{L_0}{L_{st}}} \tag{6}$$

Înlocuind L_0 și L_{st} cu expresiile lor din (4) rezultă

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{stP}}} \tag{7}$$

În cazul în care sarcina P are o mișcare uniform accelerată cu accelerația a, atunci viteza sarcinii v la contactul cu sistemul este dată de relația

$$v^2 = 2ah \Rightarrow 2h = \frac{v^2}{a} \tag{8}$$

Relația (6) devine :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{a\delta_{stP}}} \tag{9}$$

Calculul deplasării sarcinii P pe direcția de acționare a acesteia δ_P se obține cu relația

$$\delta_P = \psi \delta_{stP} \tag{10}$$

în care δ_{stP} se obține cu ajutorul uneia din relațiile cunoscute din literatura de specialitate.

Calculul tensiunii echivalente maxime se obține din relația

$$\sigma_{ech} = \psi \sigma_{ech\ st} \tag{10}$$

în care $\sigma_{ech\ st}$ se calculează cu ajutorul uneia din teoriile de rezistență aplicată la sistemul de bare dat.

Precizări. În legătură cu relațiile generale ce dau expresia multiplicatorului de impact sînt de făcut următoarele precizări :

1. Dacă $\frac{L_0}{L_{st}} = \frac{2h}{\delta_{stP}} = \frac{v^2}{g\delta_{stP}} \geqslant 10$ multiplicatorul de impact poate fi calculat cu o eroare de 5% folosind următoarele formule prescurtate :

$$\psi = 1 + \sqrt{\frac{L_0}{L_{st}}} = 1 + \sqrt{\frac{2h}{\delta_{stP}}} = 1 + \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{stP}}} \tag{11}$$

2. Dacă $\frac{L_0}{L_{st}} = \frac{2h}{\delta_{stP}} = \frac{v^2}{g\delta_{stP}} \geqslant 400$ multiplicatorul de impact poate fi calculat cu o eroare de 5% folosind următoarele formule aproximative :

$$\psi = \sqrt{\frac{L_0}{L_{st}}} = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{stP}}} = \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{stP}}} \tag{12}$$

3. Dacă nu se ține seama de masa corpului lovit (ce preia șocul) calculul cu ajutorul acestor relații este un calcul acoperitor ce duce la creșterea coeficientului de siguranță. Dacă masa proprie a corpului lovit este foarte mare în comparație cu cea care produce șocul, valoarea multiplicatorului de impact tinde către $\psi = 2$.

2.2. *Sistemul de bare solicitate prin șoc de o masă în mișcare uniformă* (fig. 2)

În cazul în care în locul sarcinii P masa m se deplasează cu o viteză constantă v_0, lucrul mecanic de deformație este reprezentat de energia cinetică a masei în mișcare, respectiv :

$$L = L_0 = \frac{mv_0^2}{2} \tag{13}$$

Energia de deformație acumulată de bară este dată de aceeași relație (3) în care N_{st}, T_{st}, M_{st}, și M_{tst} sînt eforturile într-o secțiune oarecare produse de o sarcină fictivă F, aplicată în punctul de contact al masei cu sistemul, avînd aceeași direcție cu v_0, care produce același lucru mecanic L_0.

Aplicînd teorema lui Clapeyron rezultă

$$L_0 = \psi^2 L_{st}$$

de unde

$$\psi = \sqrt{\frac{L_0}{L_{st}}} \tag{14}$$

Dacă se scrie că

$$L_{st} = F^2 \left[\Sigma \int \frac{n^2 \mathrm{d}x}{2EA} + \Sigma \int \frac{t^2 \mathrm{d}x}{2GA} + \Sigma \int \frac{m^2 \mathrm{d}x}{2EI} + \Sigma \int \frac{m_t^2 \, \mathrm{d}x}{2GI_p} \right] = F^2 L_{st}^1 \tag{15}$$

în care n, t, m, m_t sînt eforturile într-o secțiune oarecare produse de o sarcină egală cu unitatea, aplicată în punctul și pe direcția sarcinii fictive F iar L_{st}^1 lucrul mecanic produs de aceeași sarcină.

Rezultă astfel că :

$$\psi = \sqrt{\frac{mv_0^2}{2F^2 L_{st}^1}} = \frac{v_0}{F} \sqrt{\frac{m}{2L_{st}^1}} \tag{16}$$

De asemenea se mai poate scrie că

$$\sigma_{ech\,st} = F\,\sigma^1_{ech\,st} \text{ și } \delta_{stF} = F\delta^1_{stF} \tag{17}$$

în care σ^1_{echst} și δ^1_{stF} sînt tensiunea echivalentă respectiv deplasarea pe direcția sarcinii F pentru o sarcină $F = 1$.

Se obține astfel

$$\sigma_{ech} = \psi\sigma_{echst} = \frac{v_0}{F}\sqrt{\frac{m}{2L^1_{st}}}\cdot F\,\sigma^1_{echst} = v_0\,\sigma^1_{echst}\sqrt{\frac{m}{2L^1_{st}}} \tag{18}$$

$$\delta_F = \psi\delta_{stF} = \frac{v_0}{F}\sqrt{\frac{m}{2L^1_{st}}}\cdot F\delta^1_{stF} = v_0\delta^1_{stF}\sqrt{\frac{m}{2L^1_{st}}} \tag{19}$$

Relațiile (18) și (19) arată că atît σ_{ech} cît și δ_F sînt independente de sarcina fictivă F și că în relațiile generale (16), (18) și (19) în toate mărimile ce o conțin se poate înlocui $F = 1$.

Tabelul 1

Nr. crt.	Modul de producere a șocului	ψ	δ	σ_{ech}
1	Fig. 1	$1+\sqrt{1+\frac{L_0}{L_{st}}} = 1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}} = 1+\sqrt{1+\frac{v_0^2}{a\delta_{stP}}}$ $1+\sqrt{\frac{L_0}{L_{st}}} = 1+\sqrt{\frac{2h}{\delta_{stP}}} = 1+\sqrt{\frac{v^2}{a\delta_{stP}}}$ pentru $\frac{L_0}{L_{st}} = \frac{2h}{\delta_{stP}} = \frac{v^2}{a\delta_{stP}} \geqslant 10$ $\sqrt{\frac{L_0}{L_{st}}} = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{stP}}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{a\delta_{stP}}}$ pentru $\frac{L_0}{L_{st}} = \frac{2h}{\delta_{stP}} = \frac{v_0^2}{a\delta_{stP}} \geqslant 400$	$\psi\,\delta_{stP}$	$\psi\sigma_{echst}$
2	Fig. 2	$\sqrt{\frac{L_0}{L^1_{st}}} = v_0\sqrt{\frac{m}{2L^1_{st}}}$	$v_0\delta_{st\,v0}\sqrt{\frac{m}{2L^1_{st}}}$	

Rezultă astfel pentru relațiile (14) și (16)

$$\psi = \sqrt{\frac{L_0}{L^1_{st}}} = v_0\sqrt{\frac{m}{2L^1_{st}}} \tag{20}$$

De asemenea, în relațiile (17) deoarece sarcina fictivă $F = 1$ are direcția și sensul vitezei v_0 indicii F se pot schimba cu v_0 așa încît

$$\delta_{v0} = \psi\delta_{stv0} = v_0\,\delta_{stv0}\sqrt{\frac{m}{2L_{st}^1}} \tag{21}$$

3. Concluzii

1) Calculul multiplicatorului de impact ψ la sistemele de bare solicitate prin șoc cu o sarcină P ce se deplasează pe direcția h cu o viteză inițială nulă se face cu ajutorul relației generale (6) și a relațiilor (7) și (9). În aceste relații primul termen reprezintă efectul sarcinii P aplicate static în punctul de contact al sarcinii cu sistemul de bare.

Primul termen de sub radical reprezintă efectul dinamic al aplicării sarcinii de la înălțimea $h = 0$, cînd energia cinetică a masei m este nulă.

Al doilea termen de sub radical reprezintă efectul dinamic în cazul în care sarcina P este aplicată de la o distanță h de sistem cînd, la contactul cu sistemul, în afara efectului sarcinii P se adaugă și energia cinetică a masei m ce are viteza v. pentru anumite valori ale acestui termen pot fi folosite pentru calculul lui ψ și relațiile (11) și (12).

Pentru calculul deplasării pe direcția sarcinii (δ_P) și al tensiunii maxime (σ_{ech}) se pot folosi relațiile (10).

2) Pentru sistemele de bare solicitate prin șoc de o masă m ce se deplasează cu o viteză $v_0 = ct$ calculul multiplicatorului de impact se face cu ajutorul relației (20).

Calculul tensiunii produse de șoc se obține din relația (18) iar al deplasării pe direcția vitezei v_0 cu ajutorul relației (21).

3) Relațiile de calcul menționate au un caracter general, ele putînd fi aplicate la sisteme de bare drepte, curbe, drepte și curbe, static determinate sau nedeterminate (plane sau spațiale) supuse la solicitări prin șoc simple sau compuse.

În tabelul 1 sînt prezentate relațiile generale pentru calculul multiplicatorului de impact ψ, al deplasărilor δ și al tensiunilor maxime (σ_{ech}) la solicitările prin șoc ale sistemelor de bare.

Le calcul des systèmes de barres soumises au choc

Dans cet article on établit les relations nécessaires pour le calcul des systemes des barres droites ou courbes, isostatiques ou hyperstatiques, planes ou spatiales, soumises à des sollicitations simples ou composées.

C.Z. : 621.881.4

THE DYNAMIC ANALYSIS OF THE MECHANIZED TONGS

P. ANTONESCU, F. PETRESCU *

The paper proposes a method of the dynamic calculus of the mechanized tongs beginning with the reduced motor (active) torque to the gear crown. This torque establishes the tangential forces and the normal forces to the profile of the rotative cams. Knowing the resistant (output) torque and taking the friction forces into account, the normal reaction of the tubular bodies on the levers is calculated. The necessary motor (input) torque for the rotation of the tubes is then determined.

Keywords. Dynamic analysis; mechanized tong; blocking (tightening) torque; gear crown; motor (input) torque; resistant (output) torque, rotating cam; friction force; tangential force; normal force.

Introduction

The mechanized tongs are used for the introduction and the extraction of the tubular bodies in wells. In their structure there exists a transmission gear with cylindrical gear, wheels which ensure the transmission of the rotating motion and of the motor torque from the hydrostatic engine to the gear crown [4].

The mechanized tongs are mechanical hands [3] with a fixed aperture (fig. 1) for their motion towards and away from the tubular bodies. The crown gear operates by rollers, two levers articulated to a crown which in the initial moment is fixed by a brake.

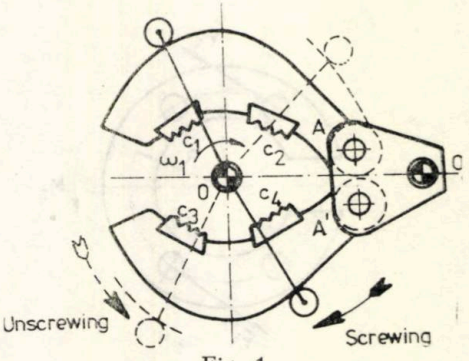


Fig. 1

The levers are provided at the exterior with cam profiles while their interior contains cutters for the blocking of the tubular bodies. The mechanical transmission allows for two demultiplication steps and implicitly for two rotations of the gear crown. Thus, the tubular bodies are screwed and unscrewed with a big rotation and a small torque, while the tightening and untightening of the threaded joints are achieved with a small rotation and a high torque.

* Associate Professor Ph. D. Eng.; Assistant Eng., Chair of Mechanisms

The Calculation of the Blocking Torque

After the blocking of levers on the tubing or on the tubular shell, tongs mechanism must overcome a resistant torque M_r for screwing-tightening and unscrewing-untightening the tubular bodies. We know, for different diameters of the tubes, the maximum resistant torque M_{rmax} for tightening or weakening the threaded joints.

The effective tightening torque is calculated depending on the motor torque M_n which is reduced to the gear crown where the resistant torque acts too.

Knowing the maximum transmission ratio of the reducer i_{red} between the engine and the gear crown (on the second step) and the mechanical efficiency η of the gear train, the torque at the gear crown M_c is calculated depending on the motor torque M_m with the formula:

$$M_c = i_{red} \cdot \eta \cdot M_m \tag{1}$$

The tangent force which acts in the centre of the gear crown rollers (two active rollers for each rotation sense) is determinated depending on the torque M_c and the radius R of the circle carrying the centre of rollers (fig. 2).

$$F_t = \frac{M_c}{2R} \tag{2}$$

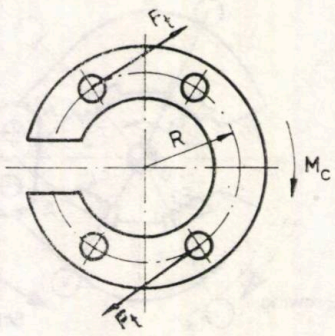


Fig. 2

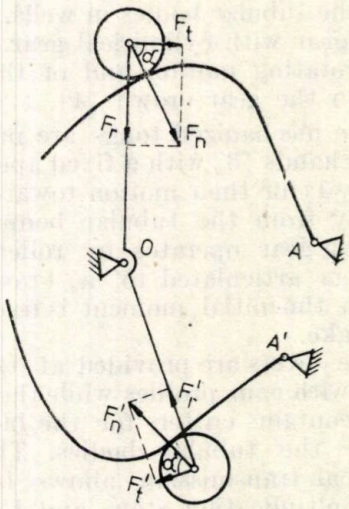


Fig. 3

Under the action of the force F_t each of two active rollers approaches the adequate profile of the rotating cam, thus the pressing forces F_n and F_n' are orientated along the respective normal directions and act in the contact point between the roller and cam (fig. 3).

If we mark the pressing angles [1] of the cams α and α' (fig. 3), the calculation formulas of the forces F_n and F'_n are :

$$F_n = \frac{M_c}{2R\cos\alpha} \; ; \; F'_n = \frac{M_c}{2R\cos\alpha'} \tag{3}$$

Supposing that each of two levers has one cutter these can be articulated directly to the fixed crown in the points A, A' (fig. 4). The friction forces are introduced here and the two reactions N, N' (of the tubular bodies on the lever-cams) are calculated depending on F_n, F'_n from the moment equations with respect to the points A, A' (fig. 5)

$$N = \frac{F_n h_n}{h_1 - \mu h_2} \; ; \quad N = \frac{F'_n h'_n}{h'_1 + \mu h'_2} \tag{4}$$

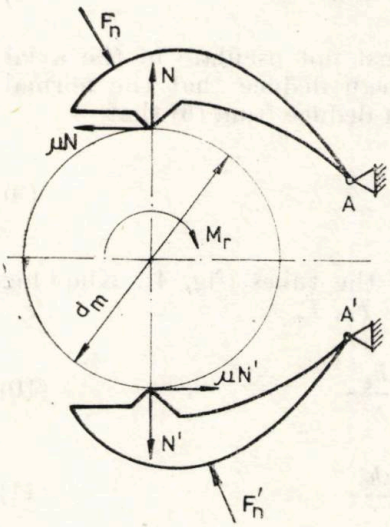


Fig. 4

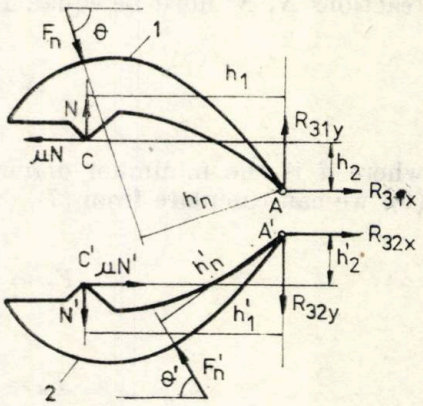


Fig. 5

To be noticed : the sense of the friction forces is changed with the change of the resistant torque M_r (fig. 4). The friction torque M_f is determined with the formula

$$M_f = \frac{\mu d}{2}(N + N') \tag{5}$$

where $\mu = 0.3-0.4$ is the friction coefficient;

d — the diameter of the tubular bodies;

N, N' — reactions calculated with (4).

The pressing (blocking) torque M_s is equal to the friction torque M_f, which must be larger than the resistant torque M_r, so that the levers do not slide on the tubular bodies.

The Calculation of the Motor Torque Depending on the Resistant Torque

If we start from the resistant torque M_r which acts in a reverse direction as against the rotation of the tube, we can write the friction torque necessary for a rotation without slide :

$$M_f = \frac{\mu d}{2}(N + N') \geqslant M_r \tag{6}$$

The equations of the moment related to the joints A, A' have the form (fig. 5)

$$N(h_1 - \mu h_2) - F_n h_n = 0 \tag{7}$$

$$N'(h_1' + \mu h_2') - F_n' h_n' = 0 \tag{8}$$

From the condition that the tube must not oscillate in the axial plane, during screwing or unscrewing, we can deduce that the normal reactions N, N' must be equal. Thus, we can deduce from (6) that

$$N = N' = \frac{M_r}{\mu d} \tag{9}$$

where d is the minimum diameter (d_m) of the tubes (fig. 4). Knowing (9), we can calculate from (7), (8) the forces F_n, F_n'

$$F_n = \frac{M_r}{\mu d}\,\frac{h_1 - \mu h_2}{h_n} \tag{10}$$

$$F_n' = \frac{M_r}{\mu d}\,\frac{h_1' + \mu h_2'}{h_n'} \tag{11}$$

Because the points C, C' must be diametrally opposed, we have $h_1 = h_1'$; $h_2 = h_2'$.
From the condition that the forces F_n and F_n' are equal we can deduce from (10), (11) the relation between the hands h_n and h_n'

$$\frac{h_n}{h_n'} = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \tag{12}$$

Therefore, if $F_n = F_n'$, between the hands h_n, h_n' there is the relation $h_n < h_n'$ which must be taken into account in the design of cam profiles. If the driving rollers (fig. 2) are mounted at the some radial distance R, the achievement of the condition $F_n = F_n'$ implies equal pressing angles $\alpha = \alpha'$ (fig. 3), i.e. is the result of the relation (3). For

$\mu = 0.3$ from the relation (12) we have $h'_n = 2h_n$. With the relations (10), (11) we determine the necessary torque for driving the gear crown (fig. 2)

$$M_{mc} = 2RF_t = \frac{2RM_r}{\mu d \cos \alpha} \frac{h_1 - \mu h_2}{h_n} \tag{13}$$

The Calculation of Fo[illegible] Lever Tongs

On tongs with 3 levers (fig. 6) the joints A, A' oscillate around point O_3, until the points C_1, C_2 of the cam 1 arrive on the circle Γ with diameter d. The point C_3 of the cam 2 reaches the circle Γ by a rotation around the point A'.

By isolating cam 2 the reaction R_{32} is introduced through the two components R_{32x}, R_{32y} (fig. 7). The reaction N_3 is calculated depending on M_r:

$$N_3 = \frac{M_r}{\mu d} \tag{14}$$

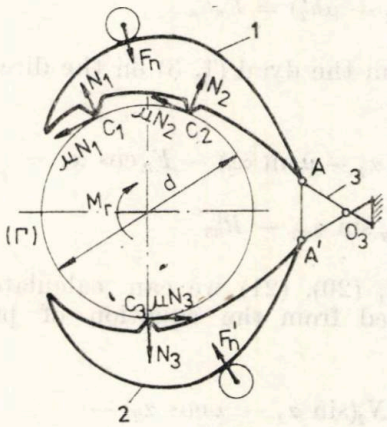


Fig. 6

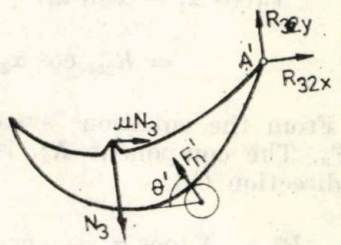


Fig. 7

The force F_n necessary for the achievement of the friction force μN_3 is deduced from the equation of moment with respect to point A'

$$F'_n = N_3 \frac{h_3 + \mu h'_3}{h'_n} \tag{15}$$

From the equations of projection, the components R_{32x}, R_{32y} result

$$R_{32x} = F'_n \cos \theta' - \mu N_3 \tag{16}$$

$$R_{32y} = F'_n \sin \theta' + N_3 \tag{17}$$

For the calculation of the other forces we can analyse the static system which is determinantly formed from the cam 1 and plate-band 3 (fig. 8) which form a dyad [1, 5].

From the condition of blocking the cam 1 on the tube with diameter d we can write the relation between N_1, N_2 and M_r [2, 5].

$$N_1 + N_2 = \frac{M_r}{\mu d} \tag{18}$$

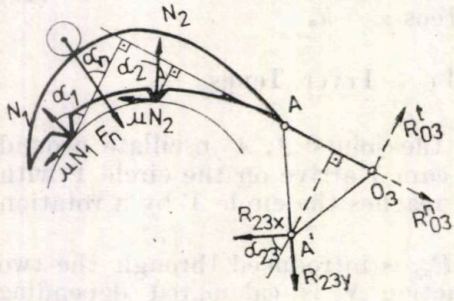


Fig. 8

From the equation of moments with respect to point A, of the forces o the link 3, R_{03}^t results (fig. 8) :

$$R_{03}^t = \frac{AA'}{O_3A} R_{23x} \tag{19}$$

We can write the moment equation depending on A, of the forces on cam 1 :

$$N_1(h_1 - \mu h_1') + N_2(h_2 + \mu h_2') = F_n h_n \tag{20}$$

Then we project all the forces from the dyad (1, 3) on the direction of R_{03}^t and we obtain the equation :

$$N_1(\cos \alpha_1 - \mu \sin \alpha_1) + N_2(\cos \alpha_2 - \mu \sin \alpha_2) - F_n \cos \alpha_n =$$

$$= R_{23x} \cos \alpha_{23} + R_{23y} \sin \alpha_{23} - R_{03}^t \tag{21}$$

From the equations system (18), (20), (21) we can calculate N_1, N_2, F_n. The component R_{03}^n is deduced from the equation of projection direction OA :

$$R_{03}^n = N_1(\cos \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1) + N_2(\sin \alpha_2 - \mu \cos \alpha_2) -$$

$$- F_n \sin \alpha_n + R_{23x} \sin \alpha_{23} - R_{23y} \cos \alpha_{23} \tag{22}$$

The reaction R_{13} in joint A is calculated from the vector equation of equilibrum of link 3 or from the components $R_{13}^t (\perp O_3A)$ and R_{13}^n $(\| O_3A)$:

$$R_{13}^t = R_{23x} \cos \alpha_{23} + R_{23y} \sin \alpha_{23} - R_{03}^t \tag{23}$$

$$R_{13}^n = R_{03}^n - R_{23x} \sin \alpha_{23} + R_{23y} \cos \alpha_{23} \tag{24}$$

With the forces F_n, F_n' the torque at the gear crown is determined by the formula :

$$M_c = R(F_n \cos \alpha + F_n' \cos \alpha') \tag{25}$$

An example of calculation for forces in the 3 lever tongs : we consider the design (fig. 9) of the tongs in the tight position on the tube of diameter $d = 114.3$ mm ($4^{1/2''}$) with the resistant torque $M_r = 800$ mdaN.

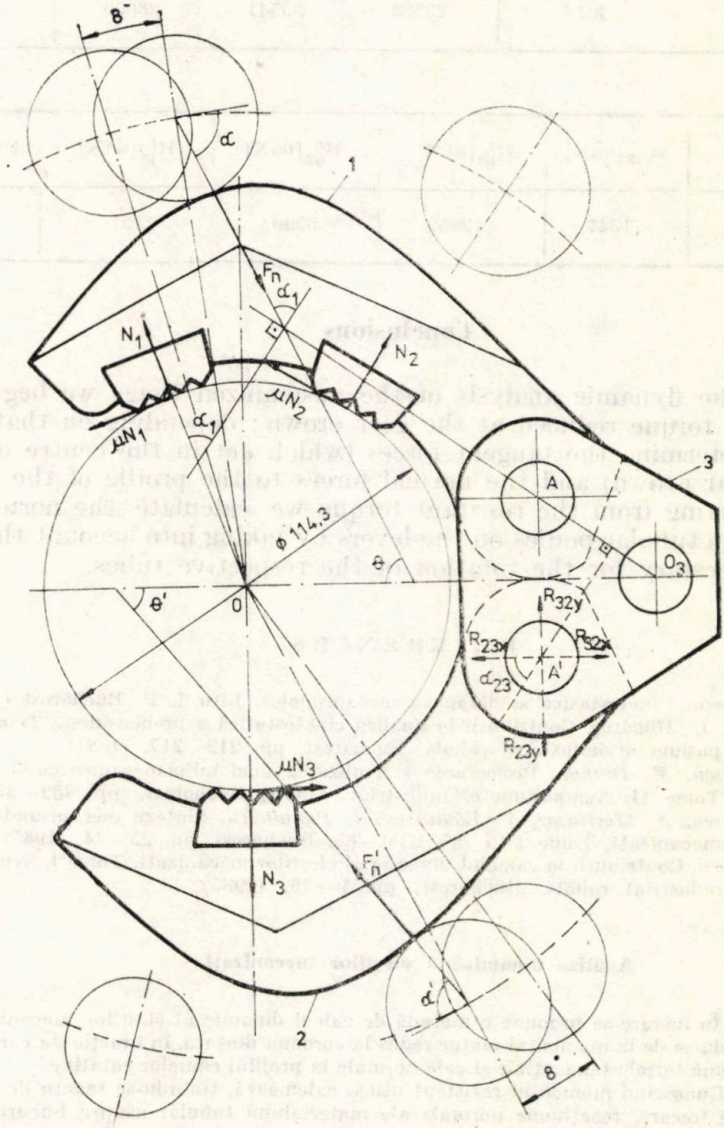


Fig. 9

The respective results are listed in the table below.

Table 1

Results of Dynamic Analysis

N_1[daN]	N_2[daN]	N_3[daN]	F_n[daN]	F'_n[daN]	M_c[mdaN]
19312	4018	23330	35541	28696	2253

R_{32}[daN]	R_{32y}[daN]	R^t_{03}[daN]	R^n_{03}[daN]	R^t_{13}[daN]	R^n_{13}[daN]
11446	1347	12952	6500	7491	4790

Conclusions

In the dynamic analysis of the mechanized tongs we begin from the motor torque reduced at the gear crown; depending on that torque, we can determine the tangent forces (which act in the centre of rollers on the gear crown) and the normal forces to the profile of the rotating cams. Starting from the resistant torque we calculate the normal reactions of the tubular bodies on the levers by taking into account the motor torque necessary for the rotation of the respective tubes.

REFERENCES

1. *P. Antonescu*, Cinetostatica și dinamica mecanismelor. Lito I. P. Bucharest (1980).
2. *F. Kovacs, L. Mădăraș*, Contribuții la analiza cinetostatică a prehensiunii. Tome I. Symposium of industrial robots. Bucharest, pp. 212—217, (1981).
3. *P. Antonescu, M. Dranga*, Proiectarea și realizarea unei mîini mecanice cu 3 mobilități. Tome II. Symposium of industrial robots. Bucharest, pp. 452—459, (1982).
4. *P. Antonescu, A. Martineac, V. Rădulescu, I. Panaitescu*, Sinteza mecanismelor cleștilor mecanizați, Tome I—1. SYROM—85, Bucharest, pp. 25—34, (1985).
5. *P. Antonescu*, Contribuții la calculul dinamic al cleștilor mecanizați. Tome I. Symposium of industrial robots. Bucharest, pp. 9—19, (1985).

Analiza dinamică a cleștilor mecanizați

În lucrare se propune o metodă de calcul dinamic al cleștilor mecanizați pornindu-se de la momentul motor redus la coroana dințată, în funcție de care se determină forțele tangențiale și cele normale la profilul camelor rotative.

Cunoscînd momentul rezistent util se calculează, ținindu-se seama de forțele de frecare, reacțiunile normale ale materialului tubular asupra bacurilor după care se determină momentul motor necesar pentru rotirea țevilor respective.

C.Z. : 533.6 ; 629.7

VELOCITY DISTRIBUTION ON AUTOVEHICLE CONTOUR THROUGH NUMERICAL SIMULATION

M. OPREAN, P. CIZMAS, F. STOENESCU *

In this paper the authors propose the determination of the aerodynamic characteristics using the method of conformal mappings developed in [1]. The flow around the vehicle is considered as potential and inviscid. The function responsible for the achievement of the conformal mapping of the unit circle onto the vehicle contour is to be obtain, in principle, through the composition of a Fourier series with a Weining-Manea function. The body shape is made discret along (longitudinal and cross) sections, each section requiring a reduced number of points (30 up to 60 points).

Having compared the calculated results with those obtained experimentally inside the wind tunnel, the authors estimate that the velocity distribution may be calculated with sufficient accuracy, using the reduction factor F_R (see Chapter 2).

The method suggested, besides the fact that it requires a reduced computation memory, provides the advantage that for a section of the contour for which a single conformal mapping is determined, more velocity distribution can be obtained corresponding to different flow incidences.

1. Introduction

The research carried out to reduce the energy consumption of the motor vehicle highlight the following :

— a 10% reduction of the drag coefficient *CD* yields 3.5% increase in the economy of the American compound cycle (55% city cycle — — 45% motorway cycle) without diminishing the other performance values [7°];

— the improvement of the body shape might result in fuel savings up to 1/3 from the consumption at 130 km/h, with only reasonable efforts implied [6];

— the air resistance may be reduced about 20% with respect to present vehicles, in the design stage.

The design stage is the most efficient instant of acting upon the frame air resistance. This should be carried out on the one hand upon the vehicle general geometry and its component volumes and on the other hand upon its surface flaws :

A difference of about 20% was found for the *CD* coefficient in a flat body with respect to the same body with protuberances in the critical surfaces [3], [5].

* Lecturer Ph. D., Autovehicles Dept.; Eng.; Eng., ICSITA Braşov

The establishment of the car aerodynamics on 1/1 scale models, in wind tunnels being extremely expensive and difficult, one frequently resorts to small scale models, which allow important changes at a fast step and at low cost with fairly accurate results.

A way for determining the aerodynamic characteristics is the numerical simulation of the flow, around the car, using the technics like F.E.M., B.E.M. or source-sink panel method.

One presents the results obtained using the method of conformal mappings, compared with the experimental ones in the following applications :

— van, scale 1/10 (photo 1);
— motor vehicle, UNI-CAR [8];
— medium European car [2].

There is a satisfactory agreement of the computed results with the measured ones at least for the front end half of the car.

This method is profitable and economical even in the case of the inviscid fluid, in determining the optimum shape of the forebody.

2. Method Description and Experimental Results

Research in aerodynamics has almost abandoned the method of conformal mappings on account of the tridimensional capabilities of the new methods in particular and of the difficulty in determining the function liable to conformally map a domain bounded by a chosen contour into a domain bounded by an imposed contour.

The digital approach of conformal mapping in the more general case of contour meshes [1] enabled the determination of velocity distribution for a motor vehicle on the assumption of a potential, incompressible, stationary motion.

Under the circumstances, the particular case will be the choice of a high enough solidity liable to prevent the contours from affecting each other.

The speed distribution thus computed is the starting point in the consideration of viscosity whose goal is to determine the shape resistance and the friction resistance featured by parameter C_D[4].

One knows that Jukovski's function

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta = \frac{1}{\zeta}\right) \tag{1}$$

maps the exterior of the unit circle into a plane plate. By moving the circle centre from its origin and by changing its radius, its transform through (1) will be a certain contour A. The parameters determining the shape of curve A are only 3 (x_0, y_0 — the circle centre coordinates, r — — the radius), therefore it is highly unlikely to obtain a given contour. That's why we shall do the opposite : with the given contour A, curve E will be determined by inverting Jukosvki's transformation.

Depending on the shape of contour A, contour E will more or less look like a circle.

Then there will be determined the function which conformally maps the unit circle into contour E (see fig. 1), by taking it as :

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \zeta^{-i} \tag{2}$$

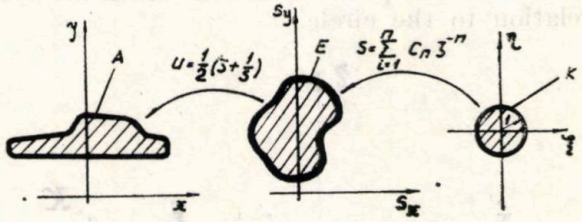


Fig. 1 — Diagram of conformal mapping

As through the composition of conformal mappings another conformal mapping is obtained, the function z which conformally maps the exterior of the unit circle into the given contour can be determined :

$$z(\zeta) = u(s) \, o \, s(\zeta) \tag{3}$$

where

$$u = \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)$$

In [1] there has been determined the speed distribution for a (compressor or turbine) profile mesh, the E contour being acquired by using Weinig-Manea's transformation :

$$u = \frac{t}{2\pi}\left(e^{i\lambda} \ln \frac{s+R}{s-R} + e^{-i\lambda} \ln \frac{Rs+1}{Rs-1} + B\right) \tag{4}$$

R and B are constants which are determined according to the solidity and λ angle ($\lambda = 0$, when applied to motor vehicles). For $t/b > 5$ the contour may be considered as isolated and as the results obtained by using the Weinig-Manea function for low solidity values agree with the results yielded by Jukovwki's function, the program used in [1] has undergone no changes, a more general „soft" having been prefered.

The benefit of determining the function which conformally maps the exterior of the unit circle into the contour A of the motor vehicle lies in the possibility of immediate calculation of the speed distribution over the circle.

The motor vehicle speed distribution will result therefore from the well known relation

$$w = \frac{W}{\dfrac{dz}{d\zeta}} \tag{5}$$

The complex potential is first determined in the plane of the unit circle by using the property that conformal mappings evince of preserving the circulation and source constant.

With this aim in view, there are computed the C and D positions of the rotosources external to circle K which by resorting to the conformal mapping will be „thrown out" infinitely into the plane of contour A. For the circle to be a stream line the complex source I_G and I_H (see fig. 2) will be introduced at points G and H which are symmetrical with C and D in relation to the circle.

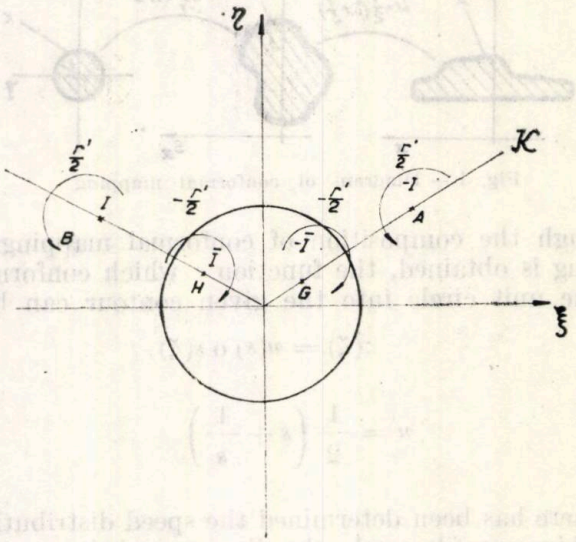


Fig. 2 — Location of rotosources in plane K

Since, with incident flow, a certain circulation Γ' will occur in plane K, it will have to be found around the unit circle as well. Thus, the complex potential in plane K is obtained:

$$F(\zeta) = \frac{tV_\infty}{2\pi}\left[e^{i\varphi_1}\left|\ln\frac{\zeta-\zeta_C}{\zeta-\zeta_D}+e^{-i\varphi_1}\ln\frac{\zeta-\zeta_H}{\zeta-\zeta_G}\right.\right]- \\ -\frac{i\Gamma'}{4\pi}\ln\frac{(\zeta-\zeta_C)(\zeta-\zeta_D)}{(\zeta-\zeta_G)(\zeta-\zeta_H)} \tag{6}$$

The condition of finite speed in the trailing edge (Kutta-Jukovski)

$$\left.\frac{dF}{d\zeta}\right|_{t.e.} = 0 \tag{7}$$

yields circulation Γ' while the velocity of the motor vehicle outline is acquired by using relation (5).

Fistly, the code was wrote for a homecomputer, but then, for time saving, was implemented on a PDP computer. The code is in PASCAL and the run is about 2 minutes for a 45 points section.

An illustration of the method is supplied by figure 3, wich whows the velocity distribution computed by using the above method in the case of longitudinal profiles taken for 3 motor vehicles.

With respect to the absolute values of the measured speeds a reduction factor ranging from 1.3 to 1.7 should be introduced (greater for shapes with important variations of the longitudinal sections) with the view to achieving the superposition of the computed curves with the measured ones.

This is accounted for, by the fact that the model is computed in 2*D*, ideal fluid, whereas the measurements were made in 3D, real fluid.

The speed increases on a model in 3D is less than in 2D, because n the first case the flow can surpass the obstacle easier.

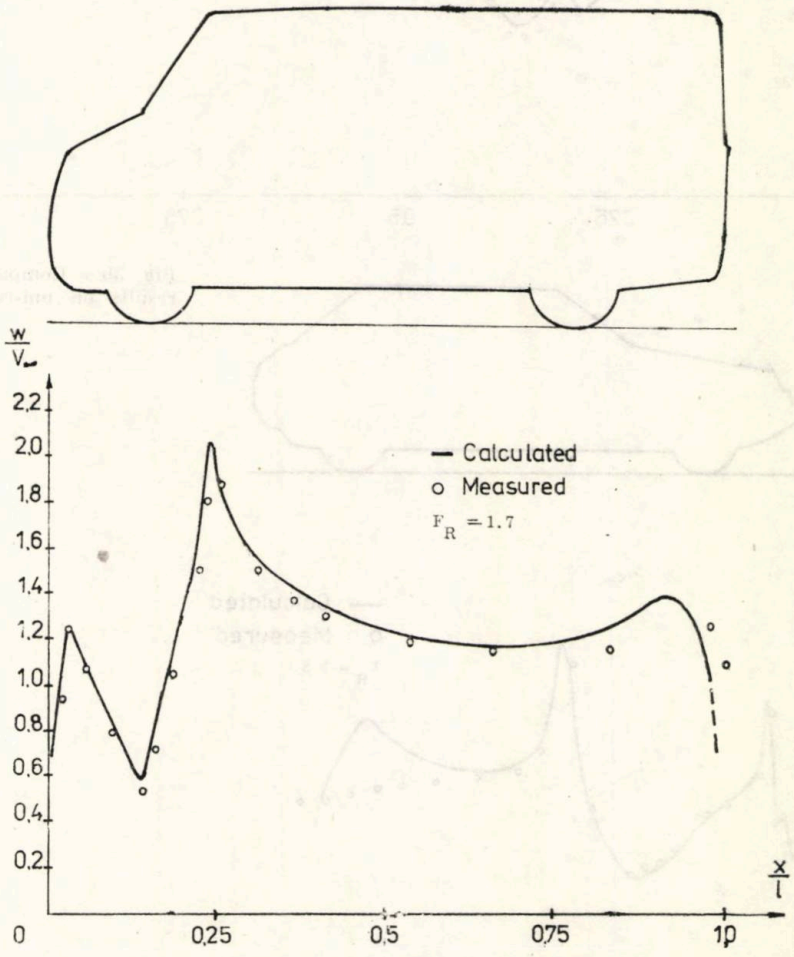


Fig. 3a — Comparison of results on van shape

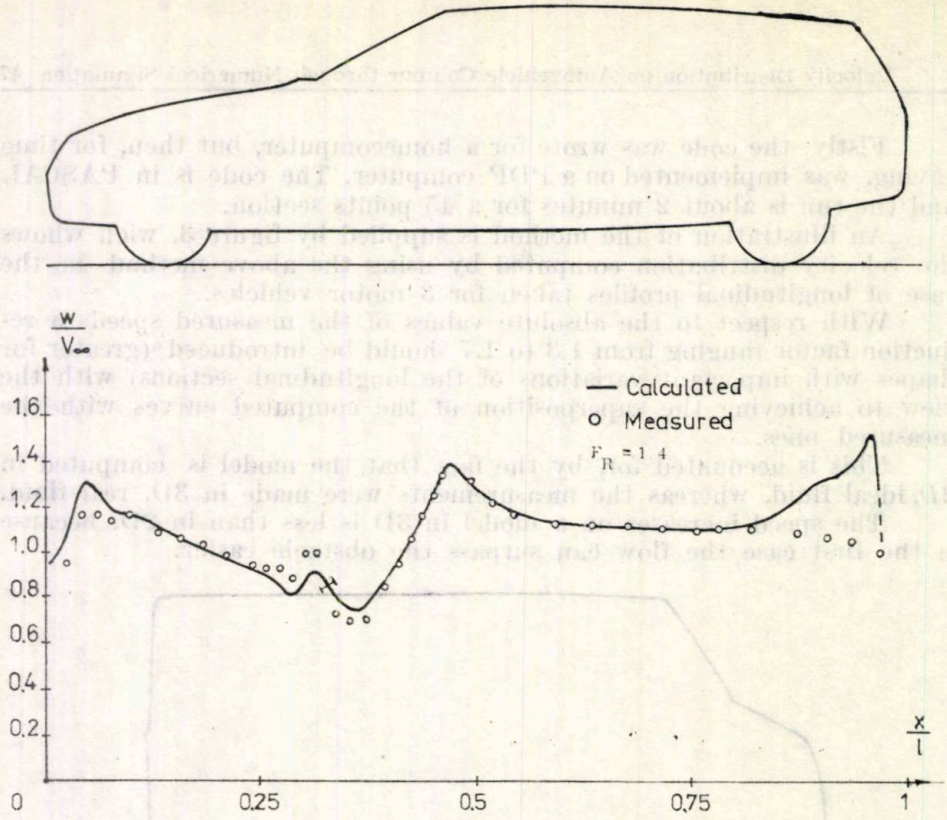


Fig. 3b — Comparison of results on uni-car shape

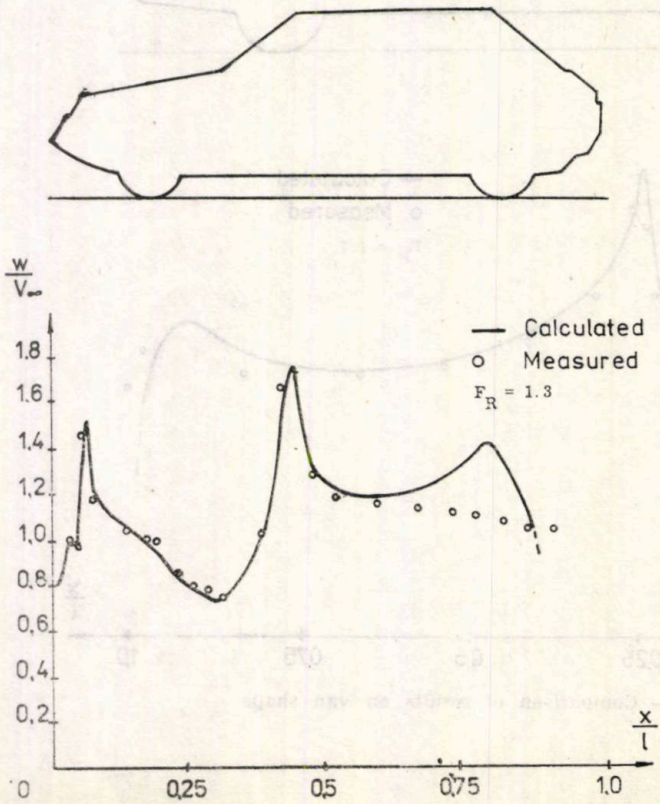


Fig. 3c — Comparison of results on medium european car shape

The boundary layer increases the speed too, but the reduction factor is diminished by the cooling air flow that was overlooked.

One finds that the shape of the speed distribution curve is very close to the measured one, almost 80% from the length of the longitudinal profile of the car which emphasizes the importance of the method from the viewpoint of the car shape designer.

3. Conclusions

The results obtained by numerical calculation by using the method of conformal mappings and corrected with F_R are fairly close to the measured values excepting the rear and half.

The method is profitable and economical in determining the optimum shape of the motor vehicle forebody from the very design stage.

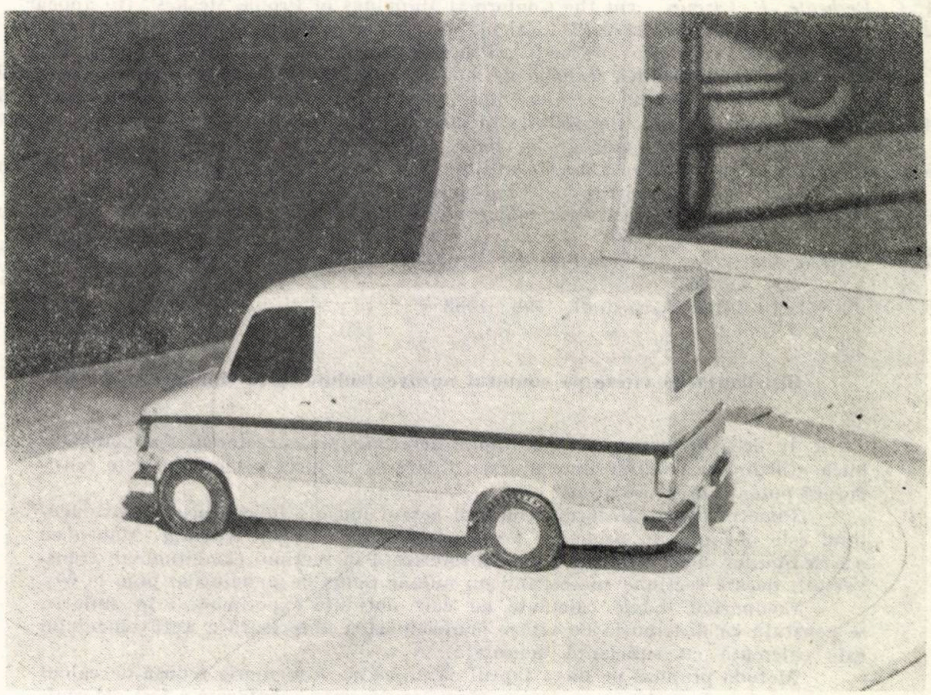


Fig. 4

AKNOWLEDGMENTS

The van experimental measurements were made at INCREST (model preparation) and at the Faculty of Aeronautics from the Polytechnic Institute of Bucharest.

SYMBOLS

A — vehicle contour
E — Intermediate contour
K — contour of circle unit

K — plane of circle unit
z — variable of the vehicle contour plane; $z = x + iy$
s — variable of the intermediate contour plane; $s = s_x + is_y$
ζ — variable of the circle unit plane; $\zeta = \xi + in$
t — mesh pitch
b — profil chord
λ — angle of mesh mounting
w — velocity on the motor vehicle
W — velocity on the unit circle
V_∞ — velocity at infinity
i_∞ — incidence
φ_1 = $\lambda - i_\infty$
I = $Q + i\Gamma = tV_\infty e^{i\varphi_1}$; I — complex source
F_R — reduction factor

RFERENCES

1. *C. Berbente, P. Cizmas*, „On the Conformal Mappings of Profile Meshes" (to appear).
2. *C. Berta, T. Tacca, A. Zucchelli*, „Calculation of Vehicles Aerodynamic Characteristics by Using Numerical Methods", Proceedings, Vol. 2, ISATA'80, Torino.
3. *R. Choulet*, "Des possibilités réalistes de réduction de la trainée aérodynamique pour véhicules de tourisme et industriels", Les ingénieurs de l'automobile, nr. 5, 1980.
4. *M. Oprean, F. Stoenescu*, "Possibilities of Drag Reduction in the Designing Stage", Construcţia de maşini, nr. 6, 1983.
5. *G. Roussillon*, "J9-Nouveau vehicule utilitaire avec prise en compte des économies d'énergie", Les ingénieurs de l'automobile, nr. 5, 1980.
6. *M. Sardou*, "Moyens d'essais aérodynamique et effet de sol", Les ingénieurs de l'automobile, nr. 5, 1980.
7. *U. Seiffert and others*, "Steigerung der Kraftstofwirtschftlichkeit beim Automobil", ATZ, nr. 4, 1980.
8. * * *, "UNI-CAR", Darmstadt, Juli, 1983.

Distribuţia de viteze pe conturul autovehiculului prin simulare numerică

În această lucrare autorii propun determinarea caracteristicilor aerodinamice utilizînd transformările conforme. Curgerea în jurul vehiculului este considerată potenţială şi nevîscoasă.

Funcţia care transformă conform cercul unitate în conturul autovehiculului este obţinută în principiu prin compunerea funcţiei Weining—Manea cu o serie Fourier. Forma corpului este discretizată în secţiuni (longitudinal, transversal), fiecare secţiune necesitînd un număr redus de puncte (30 pînă la 60).

Comparînd datele calculate cu cele obţinute experimental în suflerie, se constată că distribuţia de viteze pentru partea anterioară a autovehiculului este calculată cu suficientă acurateţe.

Metoda propusă pe lîngă faptul că necesită o memorie redusă de calcul are avantajul că pentru un contur a cărui transformare conformă a fost determinată se pot obţine mai multe distribuţii de viteze pentru diferite incidenţe de curgere a fluidului.

C.Z. :681.892

UN MODEL LINIAR ÎN VARIABILE DE STARE PENTRU DINAMICA LONGITUDINALĂ EVIDENȚIIND EFECTELE AEROELASTICE DATORATE VIBRAȚIILOR STRUCTURII

I. STIHARU, CARMEN ALEXE *

Tehnologia CCV a impus o analiză detaliată a stabilității și manevrabilității aeronavelor cu grad mare de elasticitate. Proiectarea sistemelor automate pentru conducerea zborului a necesitat un set de ecuații de mișcare suficient de precise pentru aeronavele la care se evidențiază pregnant efectele aeroelastice. O astfel de formulare se evidențiază în lucrarea de față; se folosesc derivatele de stabilitate și comandă ale aerodinamicii aeronavei rigide și modurile de vibrație simetrice ale structurii pentru a pune în evidență forțele și momentele datorate efectelor aeroelastice.

În ecuațiile liniarizate ale mișcării longitudinale se vor cnonsidera suplimentar perturbații mici în forțele și momentele aerodinamice datorate valorii locale a unghiului de atac $\alpha(x, y\, t)$, a vitezei verticale

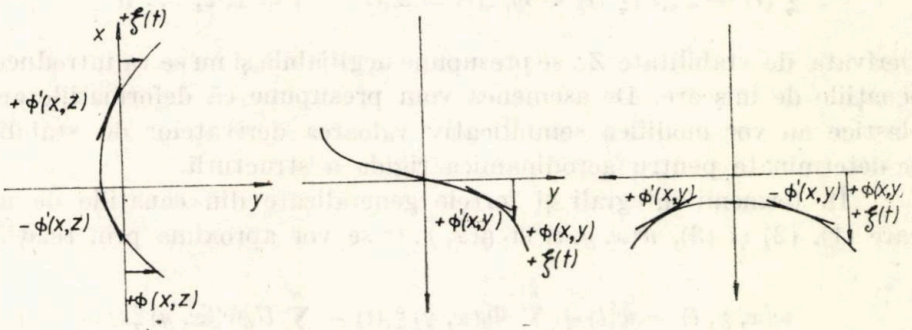


Fig. 1

$w(x, y, t) = U_0^{\alpha}(x, y, t)$ și vitezei de tangaj $\dot{\theta}(x, y, t)$. Caracteristicile vibrațiilor elastice vor fi introduse idealizînd structura ca o placă în planul XY cu moduri de vibrație ortogonale libere caracterizate prin amplitudinile locale $\Phi(x, y)$, în sistemul de coordonate locale afixat centrului de greutate al aeronavei [3]. Convențiile de semn sînt cele prezentate în fig. 1.

* Șef lucrări dr. ing.; Asistent ing., catedra Aeronave

Ecuațiile mișcării perturbate longitudinale vor fi în această ipoteză [2]:

$$\dot{q}(t) = M_u \cdot u(t) + M_\theta \cdot \theta(t) + M\delta_p \cdot \delta_p(t) + \tag{1}$$

$$+ \int_x \int_y \frac{\partial^2 M_{\dot{w}}}{\partial x \partial y} \dot{w}(x, y, t)\, dx\, dy + \int_x \int_y \frac{\partial^2 M\dot{w}}{\partial x \partial y} \dot{w}(x, y, t)\, dx dy +$$

$$+ \int_y \int_x \frac{\partial^2 M_q}{\partial x \partial y} \dot{\theta}(x, y, t)\, dx dy.$$

$$\dot{u}(t) = \bar{X}_u \cdot u(t) + \bar{X}_w \cdot w(t) + \bar{X}_\theta \cdot \theta(t) + \bar{X}_{\delta t} \cdot \delta_t(t) \tag{2}$$

$$\dot{w}(t) = Z_u \cdot u(t) + Z_\theta \cdot \theta(t) + Z_{\delta_p} \cdot \delta_p(t) + \tag{3}$$

$$+ \int_y \int_x \frac{\partial^2 Z_w}{\partial x \partial y} \dot{w}(x, y, t)\, dx dy + \int_y \int_x \frac{\partial^2 Z_q}{\partial x \partial y} \dot{\theta}(x, y, t)\, dx dy$$

Vom considera în aceste ecuații doar influența acelor parametri pe care i-am identificat ca legați direct de nodurile de vibrație ale structurii. Setul de ecuații se va completa cu forma normalizată a modurilor de vibrație ale structurii:

$$\ddot{\xi}(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{\xi}(t) + \omega_i^2 \xi(t) = \Xi_i(t) \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{4}$$

Derivata de stabilitate $Z_{\dot{w}}$ se presupune neglijabilă și nu se va introduce în ecuațiile de mișcare. De asemenea vom presupune că deformațiile aeroelastice nu vor modifica semnificativ valoarea derivatelor de stabilitate determinate pentru aerodinamica rigidă a structurii.

În termenii integrali și forțele generalizate din ecuațiile de mișcare (1), (2) și (3), $w(x, y, t)$ și $\dot{\theta}(x, y, t)$ se vor aproxima prin relațiile:

$$w(x, y, t) = w(t) + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x, y)\, \xi_i(t) - \sum_{i=1}^{n} U_0 \Phi_i'(x, y)\, \xi_i(t) \tag{5}$$

$$\dot{\theta}(x, y, t) = \dot{\theta}(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i'(x, y) \dot{\xi}(t) \tag{6}$$

ceea ce conduce la

$$\int_y \int_x \frac{\partial^2 Z_w}{\partial x \partial y} w(x, y, t)\, dx dy + \int_y \int_x \frac{\partial^2 Z_q}{\partial x \partial y} \dot{\theta}(x, y, t)\, dx dy = \tag{7}$$

$$= Z_w \cdot w(t) + Z_q \dot{\vartheta}\,(t) + \sum_{i=1}^{n} [Z_{\xi_i} \xi_i(t) + Z_{\dot{\xi}_i} \cdot \dot{\xi}_i(t)]$$

$$\iint_{y\ x} \frac{\partial^2 M_w}{\partial x \partial y}\, w(x, y, t)\, dx dy + \iint_{y\ x} \frac{\partial^2 M_{\dot{w}}}{\partial x \partial y}\, \dot{w}(x, y, t)\, dx dy + \tag{8}$$

$$+ \iint_{y\ x} \frac{\partial^2 M_q}{\partial x \partial y}\, \dot{\vartheta}(x, y, t)\, dx dy = M_w \cdot w(t) + M_{\dot{w}} \cdot \dot{w}(t) + M_q \cdot \dot{\vartheta}(t) +$$

$$+ \int_x \sum_{i=1}^{n} \int_y [M_{\xi_i} \xi_i + M_{\dot{\xi}_i} \dot{\xi}_i + M_{\ddot{\xi}_i} \ddot{\xi}_i]$$

Expresiile derivatelor Z_{ξ_i}, $Z_{\dot{\xi}_i}$, M_{ξ_i}, $M_{\dot{\xi}_i}$, $M_{\ddot{\xi}_i}$ se vor prezenta în anexa 1, [2]. Expresia forței generalizate dependentă de influența modurilor de vibrație elastică se va putea pune în forma

$$\Xi_i(t) = \frac{1}{\mathcal{M}_i} \iint_{y\ x} \frac{\partial^2 Z(t)}{\partial x \partial y}\, \Phi_i(x, y)\, dx dy \tag{9}$$

unde

$$Z(t) = m \Big\{ Z_w \cdot W(t) + Z_q \cdot \dot{\vartheta}(t) + \tag{10}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} [Z_{\xi_i} \cdot \xi_i + Z_{\dot{\xi}_i} \cdot \dot{\xi}_i(t) + Z_{\delta_p} \cdot (t) \Big\}$$

și $\mathcal{M}_i$ este masa generalizată a modului de vibrație „i" Astfel forma generalizată va avea expresia :

$$\Xi_i(t) = F_{iw}\, w(t) + F_{iq}\, \dot{\vartheta}(t) + \tag{11}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} [F_{i\xi_j} \cdot \xi_j(t) + F_{i\dot{\xi}_j} \cdot \dot{\xi}_j(t)] + F_{i\delta_p} \cdot \delta_p\,(t)$$

Valorile derivatelor de stabilitate și comandă sînt tabelate în anexa 1, 2.

Ecuațiile de mișcare completate cu cele ale vibrațiilor elastice vor permite deducerea unui model în variabile de stare q, u, w, ϑ, ξ_i, $\dot{\xi}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), pentru dinamic longitudinală în care se evidențiază efectele aeroelastice ale structurii.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \\ \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}_q & \bar{M}_u & \bar{M}_w & \bar{M}_\theta & \bar{M}_{\xi_1} & \bar{M}_{\xi_2} & \bar{M}_{\xi_3} & \bar{M}_{\xi_4} & \bar{M}_{\dot{\xi}_1} & \bar{M}_{\dot{\xi}_2} & \bar{M}_{\dot{\xi}_3} & \bar{M}_{\dot{\xi}_4} \\ -W & \bar{X}_u & \bar{X}_w & \bar{X}_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Z}_q & \bar{Z}_u & \bar{Z}_w & \bar{Z}_\theta & \bar{Z}_{\xi_1} & \bar{Z}_{\xi_2} & \bar{Z}_{\xi_3} & \bar{Z}_{\xi_4} & \bar{Z}_{\dot{\xi}_1} & \bar{Z}_{\dot{\xi}_2} & \bar{Z}_{\dot{\xi}_3} & \bar{Z}_{\dot{\xi}_4} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{1q} & 0 & F_{1w} & 0 & \bar{F}_{1\xi_1} & F_{1\xi_2} & F_{1\xi_3} & F_{1\xi_4} & \bar{F}_{1\dot{\xi}_1} & F_{1\dot{\xi}_2} & F_{1\dot{\xi}_3} & F_{1\dot{\xi}_4} \\ F_{2q} & 0 & F_{2w} & 0 & F_{2\xi_1} & \bar{F}_{2\xi_2} & F_{2\xi_3} & F_{2\xi_4} & F_{2\dot{\xi}_1} & \bar{F}_{2\dot{\xi}_2} & F_{2\dot{\xi}_3} & F_{2\dot{\xi}_4} \\ F_{3q} & 0 & F_{3w} & 0 & F_{3\xi_3} & F_{3\xi_2} & \bar{F}_{3\xi_3} & F_{3\xi_4} & F_{3\dot{\xi}_1} & F_{3\dot{\xi}_2} & \bar{F}_{3\dot{\xi}_3} & F_{3\dot{\xi}_4} \\ F_{4q} & 0 & F_{4w} & 0 & F_{4\xi_1} & F_{4\xi_2} & F_{4\xi_3} & \bar{F}_{4\xi_4} & F_{4\dot{\xi}_1} & F_{4\dot{\xi}_2} & F_{4\dot{\xi}_3} & \bar{F}_{4\dot{\xi}_4} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} q \\ u \\ w \\ \theta \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{M}'_{\delta p} & 0 \\ 0 & \bar{X}_{\delta t} \\ \bar{Z}_{\delta p} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_{1\delta p} & 0 \\ F_{2\delta p} & 0 \\ F_{3\delta p} & 0 \\ F_{4\delta p} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_t \\ \delta_t \end{bmatrix} \tag{12}$$

Coeficienții $\bar{M}_{\xi_i}$, $\bar{M}_{\dot{\xi}_i}$, $\bar{M}'_{\delta p}$, $\bar{F}_{i\xi_j}$, $\bar{F}_{i\dot{\xi}_j}$ vor fi prezentați în anexa 2. Modelul[1] astfel construit va permite punerea în evidență a efectelor datorate aeroelasticității în cadrul mișcării longitudinale a aeronavei. Limitele modelului sînt cele ale mișcării perturbate completate cu cele ale invarianței derivatelor de stabilitate și comandă în raport cu efectele aeroelastice în studiu. Astfel modelul este apt să permită o analiză calitativă a mișcării longitudinale pentru stadiul preliminar al proiectării sistemului de conducere a zborului, în etapa de verificare fiind necesar un model mai complex pentru simulare sau încercări în zbor pentru testarea automatului.

Un model asemănător se poate construi și pentru mișcarea laterală a aeronavei.

ANEXA 1

$$Z_{\xi_i} = -U_0 \iint_{x\,y} \frac{\partial^2 Z w}{\partial x \partial y} \Phi'_i(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$Z_{\dot{\xi}_i} = \iint_{y\,x} \frac{\partial^2 Z_w}{\partial x \partial y} \Phi_i(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{y\,x} \frac{\partial^2 Z_q}{\partial x \partial y} \Phi_i'(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$M_{\ddot{\xi}_i} = \iint_{y\,x} \frac{\partial^2 M_{\dot{w}}}{\partial x \partial y} \Phi_i(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$M_{\dot{\xi}_i} = \iint_{y\,x} \left\{ \frac{\partial^2 M_w}{\partial x \partial y} \Phi_i(x, y) - \left[U_0 \frac{\partial^2 M_{\dot{w}}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M q}{\partial x \partial y} \right] \Phi_i'(x, y) \right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$M_{\xi_i} = - U_0 \iint_{y\,x} \frac{\partial^2 M_w}{\partial x \partial y} \Phi_i'(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$F_{iw} = \frac{M}{\mathcal{M}_i} \iint_{y\,x} \frac{\partial^2 Z_b}{\partial x \partial y}\ \Phi_i(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$F_{iq} = \frac{M}{\mathcal{M}_i} \iint_{y\,x} \frac{\partial^2 Z_q}{\partial x \partial y}\ \Phi_i(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$F_{i\dot{\xi}_i} = \frac{M}{\mathcal{M}_i} \iint_{y\,x} \frac{\partial^2 Z_w}{\partial x \partial y}\ \Phi_i(x, y)\ \Phi_j(x, y) -$$

$$- \frac{\partial^2 Z_q}{\partial x \partial y}\ \Phi_i\ (x, y)\ \Phi_j'(x, y) \Big\}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$F_{i\delta_p} = \frac{M}{\mathcal{M}_i} \iint_{y\,x} \frac{\partial^2 Z \delta_p}{\partial x \partial y}\ \Phi_i(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

ANEXA 2

$$\bar{M}_{\xi_i} = - M_{\ddot{\xi}_i}(\omega_i^2 - F_{i\xi_i}) + M_{\xi_i} + \sum_{j \neq i}^{4} M_{\ddot{\xi}_i} F_{i\xi_i}$$

$$\bar{M}_{\dot{\xi}_i} = - M_{\ddot{\xi}_i}\,(2\zeta_i \omega_i - F_{i\dot{\xi}_i}) + M_{\dot{\xi}_i} + \sum_{j \neq i}^{4} M_{\ddot{\xi}_j} F_{i\dot{\xi}_i}$$

$$\bar{M}'_{\delta_p} = \bar{M}_{\delta_p} + \sum_{i=1}^{4} M_{\ddot{\xi}_i} F_{i\delta_p}$$

$$\bar{F}_{i\dot{\xi}_i} = F_{i\dot{\xi}_i} - 2_i \omega_i$$

$$\bar{F}_{i\ddot{\xi}_i} = F_{i\ddot{\xi}_i} - \omega_i^2$$

BIBLIOGRAFIE

1. *I. Stiharu*, Un model liniar pentru aeronave de transport, Buletinul IPB, Tomul XLIV, Nr. 3, 1982.
2. *R. Swaim, D. Fullman*; Prediction of Elastic-Airplane Longitudinal Dynamics from Rigid-Body Aerodynamics, Journal of Aircraft, Vol. 14, Nr. 9, 1977.
3. *R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, R. L. Halfman*; Aeroelasticity, Addison-Wesley, Reading Mass, 1955.

A Longitudinal Dynamics Model in State Functions for an Elastic Airplane

Control-configurated vehicle technology has increased the demand for detailed analysis of dynamic stability and control at the early stages of design and development.

The design of flight management system need an approximate, but reasonably accurate, set of linear equations of motion for elastic airplanes. Such a formulation is developed in this paper; it makes use of rigid-body aerodynamic stability derivatives and the symmetric elastic mode shapes in formulating the forces and moments due to elastic motion.

C.Z. ;621.515

O METODĂ RAȚIONALĂ DE PROFILARE A PALETELOR TREPTEI COMPRESORULUI AXIAL SUBSONIC

V. STANCIU*

Lucrarea stabilește o metodă de determinare a formei fibrei medii a profilelor paletei unei rețele de compresor axial subsonic pe baza transferului de energie între fluid și paletă. Se pune în evidență corelația care există între distribuția axială a încărcării paletei și forma fibrei medii a profilului acesteia.

În particular, pentru o distribuție liniară a încărcării, rezultă o variație parabolică a fibrei medii, formă curent utilizată în construcțiile actuale.

Introducere

Utilizarea ecuațiilor clasice ale mecanicii fluidelor permit determinarea unghiului de intrare a aerului în rețea β_1, precum și a unghiului de ieșire a aerului β_2, în condițiile în care se cunosc parametrii energetici de bază ai treptei compresorului axial, coeficientul de sarcină $\overline{l_{tr}^*}$, coeficientul de debit $\overline{C_a}$ și gradul de reacțiune, ρ_c.

Prin urmare :

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}\beta_1 = \dfrac{1}{\overline{C_a}}\left(\rho_c + \dfrac{\overline{l_{tr}^*}}{2}\right) \\ \operatorname{ctg}\beta_2 = \dfrac{1}{\overline{C_a}}\left(\rho_c - \dfrac{\overline{l_{tr}^*}}{2}\right) \end{cases} \tag{1}$$

În ceea ce privește forma liniei de curent sau forma fibrei medii a paletei între bordul de atac A și bordul de fugă F, ecuațiile nu precizează nimic. Există astfel posibilitatea de alegere a formei paletei respectîndu-se, în final, deviația curentului

$$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$$

Se poate imagina o multitudine de forme echivalente, care au o comportare diferită din punct de vedere al schimbului energetic. Realizarea unor asemenea rețele necesită ipoteze suplimentare. Aceste ipoteze elimină libertatea aparentă de alegere a formei paletei, dînd constructorului posibilitatea realizării unor palete pe baze raționale, științifice.

* Șef. lucrări dr. ing., catedra Aeronave

1. Corelația dintre forma fibrei medii a profilului și transferul de energie între fluid și paletă

În cele ce urmează se consideră o anumită lege de variație a transferului de energie local între paletă și fluid pe direcția axială $l^*_{tr_x} = F(x)$. Se consideră că pe direcțiile radială și tangențială au loc transformări energetice uniforme.

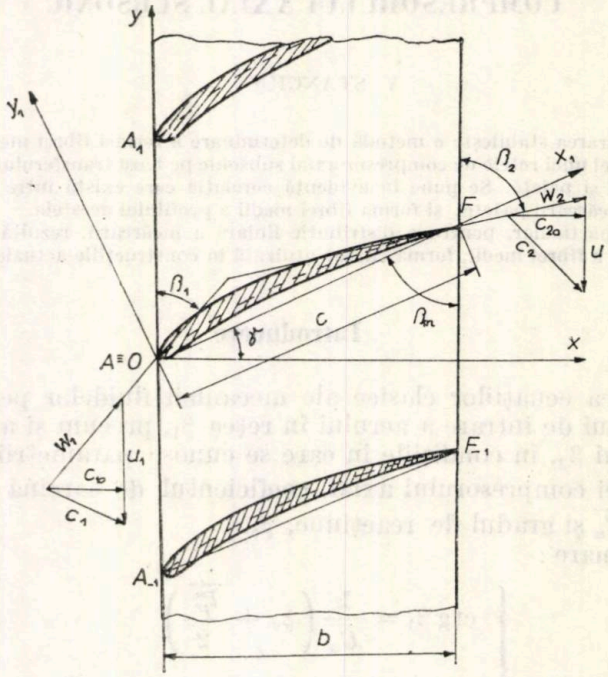


Fig. 1 — Schemă de principiu a curgerii printr-o rețea de compresor axial subsonic

Transformarea energiei cinetice a fluidului în energie potențială, pe direcția axială implică relația

$$\frac{\mathrm{d}l^*_{tr_x}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \tag{2}$$

în care $l^*_{tr_x}$ reprezintă lucrul mecanic, local, de comprimare transmis de paleta mobilă fluidului. Ecuația de bază pentru dimensionarea canalului dintre palete este :

$$\mathrm{d}l^*_{tr_x} = -U \cdot d\,(W_u) \tag{3}$$

unde $\vec{U}$ este viteza tangențială a paletei iar W_u, componenta tangențială a vitezei relative locale $W_u = W \cos \beta$

Înlocuind în relația (2) se obține :

$$\frac{U \cdot d\,(W \cos \beta)}{dx} = f(x)$$

Integrînd această relație între secțiunea de intrare în rețea 1—1 și o secțiune oarecare, situată la distanța x de frontul bordurilor de atac rezultă :

$$W \cos \beta - W_1 \cos \beta_1 = -\frac{F(x)}{U} \tag{4}$$

deoarece $F(0) = 0$

Ținînd seama că :

$$W = \frac{C_a}{\sin \beta}$$

unde C_a este componenta axială a vitezei aerului prin rețea, rezultă din relația (4) expresia :

$$\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \beta_1 = -\frac{F(x)}{U \cdot C_a} \tag{5}$$

Relația (5) permite determinarea formei traiectoriei unei particule în canalul dintre palete, deoarece :

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{dy}{dx}$$

Prin urmare :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \beta_1 - \frac{F(x)}{U \cdot C_a} \tag{6}$$

Admițînd că forma fibrei medii a profilului trebuie să se identifice cu traiectoria medie a particulei fluide, atunci ecuația (6) conduce prin integrare la expresia :

$$y = x \cdot \operatorname{ctg} \beta_1 - \frac{1}{U \cdot C_a} \int_0^x F(x) \cdot dx$$

sau :

$$y = x \cdot \operatorname{ctg} \beta_1 - \frac{1}{U \cdot C_a} \int_0^x l^*_{tr_x} \cdot dx \tag{7}$$

Această expresie stabilește, în prima formă, interdependența dintre geometria profilului și încărcarea paletei.

Ținînd seama că lucrul mecanic total transmis de paletă aerului este :

$$l_{tr}^* = U \cdot C_a (\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_2) \tag{8}$$

atunci relația (7) devine :

$$y = \left(x - \frac{1}{l_{tr}^*} \int_0^x l_{tr_x}^* \cdot \mathrm{d}x \right) \operatorname{ctg} \beta_1 + \left(\frac{1}{l_{tr}^*} \int_0^x l_{tr_x}^* \cdot \mathrm{d}x \right) \operatorname{ctg} \beta_2 \tag{9}$$

în care $\operatorname{ctg}\beta_1$ și $\operatorname{ctg}\beta_2$ au expresiile din formula (1). Se obține astfel expresia generală a corelației dintre forma fibrei medii și încărcarea paletei.

2. Rețea încărcată uniform

Cel mai rațional mod de realizare a trasferului de energie dintre paletă și fluid este cel uniform.

Acest mod de încărcare presupune

$$l_{tr_x}^* = F(x) = C \cdot x$$

în care constanta se determină din condițiile

$$x = b, \quad l_{tr_x}^* = l_{tr}^*$$

Deci : $C = \dfrac{l_{tr}^*}{b}$

și prin urmare :

$$l_{tr_x}^* = l_{tr}^* \frac{x}{b} \tag{10}$$

Ecuația fibrei medii (9) devine :

$$y = \left(x - \frac{x^2}{2b} \right) \operatorname{ctg} \beta_1, + \frac{x^2}{2b} \cdot \operatorname{ctg} \beta_2 \tag{11}$$

sau grupînd termenii, ecuația parabolei se poate transforma în :

$$y = x \cdot \operatorname{ctg}\beta_1 - \frac{x^2}{2b} (\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_2) \tag{12}$$

Din această expresie se poate calcula panta corzii profilului m ținînd seama că

$$m = \operatorname{tg} \gamma = \frac{g_F}{b} \tag{13}$$

Ordonata bordului de fugă se poate stabili cu ajutorul relației (12) în care $x = b$, adică :

$$y_F = \frac{b}{2}(\operatorname{ctg}\beta_1 + \operatorname{ctg}\beta_2)$$

sau :

$$y_F = b \cdot \operatorname{ctg}\beta_m \tag{14}$$

Se poate trage concluzia că profilul are coarda paralelă cu direcția vitezei relative medii :

$$\vec{W}_m = \frac{\vec{W}_1 + \vec{W}_2}{2} \tag{15}$$

panta corzii profilului fiind $m = \operatorname{ctg}\beta$
Aceasta corespunde situațiilor întîlnite frecvent în construcțiile actuale.

3. Verificarea metodei

În scopul stabilirii valabilității metodei se raportează ecuația parabolei la un sistem de axe $x_1\ 0\ y$, în care $0x_1$ conține coarda profilului.

Dacă se fac schimbările de variabile :

$$\begin{cases} x = x_1 \sin\beta_m - y_1 \cos\beta_m \\ y = x_1 \cos\beta_m + y_1 \sin\beta_m \end{cases} \tag{16}$$

ecuația parabolei devine :

$$y_1 = -\frac{x_1^2 + Bx_1}{2A\,x_1 + C} \tag{17}$$

în care s-a neglijat termenul în y_1^2, acesta fiind foarte mic în comparație) cu 1.

Coeficienții A, B, C, sînt funcție de β_1, β_2 și β_m. Se regăsește pe această cale ecuația parabolei care dă forma fibrei medii a profilelor de compresor axiale, uzual întîlnite [1, 2]

Concluzii

Metoda expusă scoate în evidență legătura care există între distribuția axială a încărcării paletei și forma fibrei medii a profilului acesteia. Se evidențiază faptul că cea mai convenabilă distribuție a încărcării pe direcția axială, de altfel verificată de forma fibrei medii rezultate, este

cea liniară. Bazat pe o asemenea distribuție rezultă forma fibrei medii o parabolă de ordinul doi. Dreapta care unește punctele corespunzătoare ale bordului de atac și bordului de fugă ale profilului, coarda profilului, face unghiul

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta_m$$

cu direcția axială.

BIBLIOGRAFIE

1 V. *Pimsner ș.a.*, Energetica turbomotoarelor cu ardere internă, Ed. Academiei R.S.R. București, 1964.
2. *A. Irving ș.a.*, Aerodynamic Design of Axial Flow Compressors, Cleveland Ohio, 1965.
3. *V. Stanciu*, Corelația dintre distribuția de viteze axiale și profilul canalului de lucru al unui compresor axial subsonic, Buletinul I.P.B. București, nr. 1, 1980.
4. *V. Stanciu*, Studiu privind posibilitățile de încărcare maximă a unei rețele de palete mobile de compresor axial din punct de vedere mecanic, Buletinul I.P.B. București, nr. 3, 1981.

Upon a Method of Scientifical Profiling of the Subsonic Axial-Flow Compessor's Stage Blade

The present paper establishes a method of finding out the contour of the average fibre of the blade profile of an axial subsonic compressor network, on the basis of the energy transfer between the fluid and the blade.

The connection between the axial distribution of the load on the blade and the contour of the average fibre of its profile is clearly outlined.

As a particular hypothesis, for a linear distribution of the load results a parabolic shape for the average fibre, a contour in current use in nowadays engines.

C.Z. :624.043

ANALIZA EXPERIMENTALĂ A STĂRII DE TENSIUNE DIN PEREȚII COMPENSATOARELOR LENTICULARE MONOSTRAT

C. D. TACĂ, R. IATAN, MIHAELA PĂUNESCU *

Lucrarea prezintă o instalație experimentală originală, pentru studierea stării de tensiuni din pereții compensatoarelor lenticulare monostrat, precum și rezultatele măsurărilor experimentale.

1. Introducere

Compensatoarele lenticulare, utilizate încă din primele decenii ale secolului XX cu oarecare reținere datorită dificultăților tehnologice pe care le ridică fabricarea lor, au apărut ca o posibilitate deosebit de avantajoasă de rezolvare a compensării dilatărilor termice. Proprietățile lor elastice și etanșeitatea perfectă au determinat extinderea domeniului de utilizare. Astfel, mașinile de forță sînt protejate împotriva acțiunii vibrațiilor în zona racordărilor la sistemele de conducte, prin utilizarea compensatoarelor lenticulare; la sistemele de irigații, tasarea terenului din amplasamentul stațiilor de pompare, precum și al rezervoarelor, necesită legături elastice la sistemul de conducte prin intermediul compensatoarelor lenticulare.

Posibilitățile mari de utilizare în industria chimică, petrochimică, alimentară și chiar în instalațiile reactoarelor nucleare, au determinat perfecționarea continuă a metodelor de calcul, a soluțiilor constructive alese, a tehnologiilor de fabricare.

Din studierea literaturii de specialitate, s-a putut observa că nu este elaborată încă o teorie unitară, cu ajutorul căreia să se poată stabili starea de tensiuni în oricare punct de pe suprafața exterioară sau interioară a peretelui compensatorului lenticular. S-au dedus însă relații pentru determinarea tensiunilor maxime în funcție de tipul solicitării [1] sau relații pentru determinarea tensiunilor în zonele ce pot fi asimilate cu plăci inelare sau suprafețe toroidale [2]. Avînd în vedere această situație, autorii își propun elaborarea, pe baza teoriei cu momente, a unei metode de calcul unitare pentru determinarea stării de tensiuni din pereții compensatoarelor lenticulare monostrat, luînd ca bază de referință rezultatele experimentale prezentate în articolul de față.

* Asist. ing.; Șef lucrări dr. ing., Șef lucrări, catedra Utilaj tehnologic-chimic

2. Descrierea instalației experimentale

După cum se poate observa din figurile 1 și 2, compensatorul lenticular (1) poate fi supus acțiunii unei forțe axiale prin intermediul pistonului (2) care culisează în cilindrul hidraulic (3). Cu ajutorul distribuitoru-

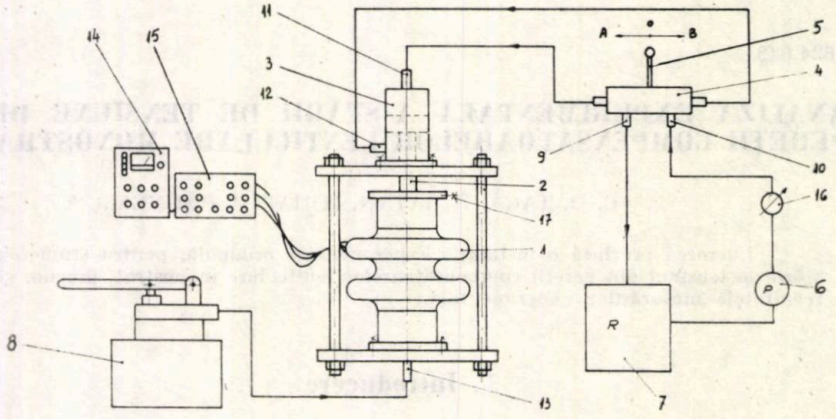


Fig. 1

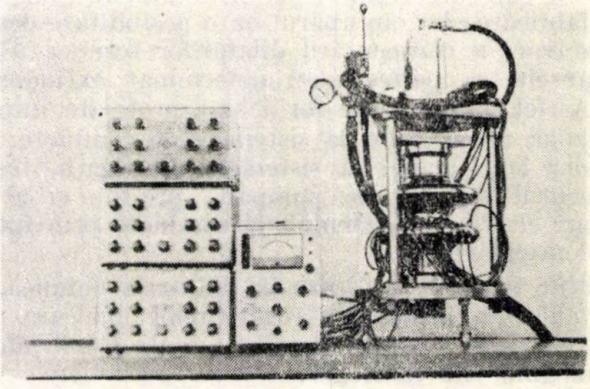


Fig. 2

lui (4) se poate dirija uleiul sub presiune fie deasupra pistonului, fie sub piston, după cum maneta (5) se află în poziția A, respectiv B. Cînd uleiul sub presiune debitat de pompa (6) acționează pe suprafața superioară a pistonului, compensatorul este solicitat la compresiune, iar cînd uleiul este introdus sub piston, compensatorul este solicitat la întindere. Cînd maneta (5) se găsește în poziția O, cilindrul hidraulic este pus în legătură cu rezervorul (7), depresurizîndu-se. Cu ajutorul pompei (8) se poate ridica presiunea în interiorul compensatorului lenticular (1), a cărui geometrie este prezentată în figura 3. Pe suprafața exterioară a compensatorului au fost lipite traductoare tensometrice rezistive în direcție meridională și în direcție inelară, în opt puncte de măsură, conf. fig. 4. Sem-

nalele traductoarelor au fost măsurate cu ajutorul unei instalații electronice, alcătuită din tensometrul electronic (14) și din dispozitivul de comutare și echilibrare (15).

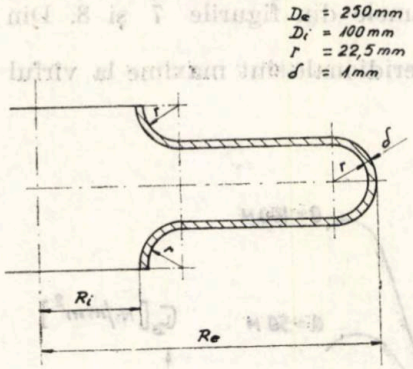


Fig. 3

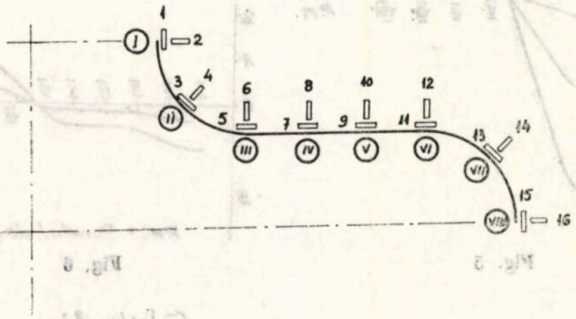


Fig. 4

Deformarea compensatorului lenticular a fost studiată în patru cazuri de solicitare, prezentate în cele ce urmează.

3. Determinări experimentale

Cazul I-Compensator lenticular solicitat de o forță axială de compresiune

Compensatorul a fost solicitat treptat cu o forță axială de compresiune cu valorile de 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 N, determinîndu-se de fiecare dată tensiunile meridionale și inelare, în fiecare din cele opt puncte de măsură. Rezultatele măsurărilor sînt prezentate în diagramele din figurile 5 și 6; din aceste diagrame rezultă că:

a) tensiunile meridionale sînt maxime la vîrful și la baza lentilelor;

b) fibra exterioară a lentilei este comprimată la bază și întinsă la vîrf;

c) tensiunile inelare sînt mult mai mici decît cele meridionale și sînt maxime la baza și la vîrful lentilei.

Cazul II — Compensator lenticular solicitat de o forță axială de întindere

Compensatorul a fost solicitat treptat cu o forță axială de întindere cu aceleași valori ca în cazul precedent, iar rezultatele măsurărilor sînt prezentate în diagramele din figurile 7 și 8. Din aceste diagrame rezultă că :

a) tensiunile meridionale sînt maxime la vîrful și la baza lentilelor ;

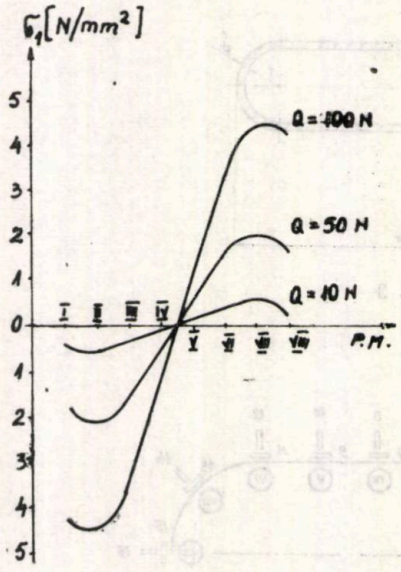


Fig. 5

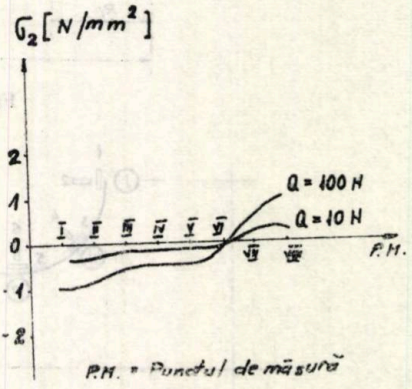


Fig. 6

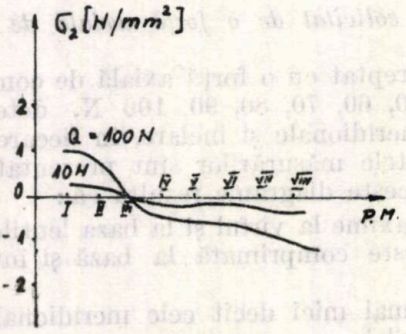


Fig. 7

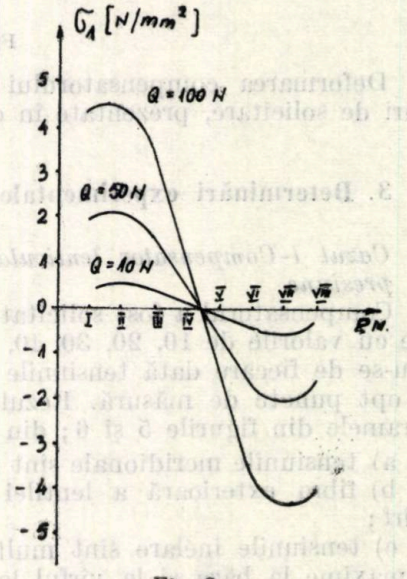


Fig. 8

b) fibra exterioară este comprimată la vîrful lentilei și întinsă la baza lentilei ;

c) tensiunile inelare sînt mult mai mici decît cele meridionale și sînt maxime la baza și la vîrful lentilei.

Cazul III — Compensator lenticular aflat sub acțiunea presiunii interioare

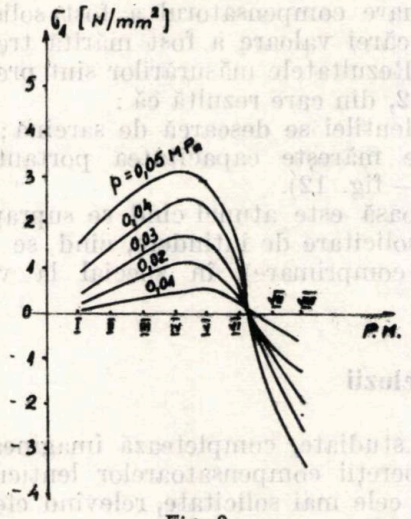


Fig. 9

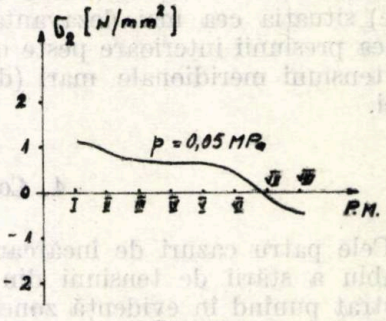


Fig. 10

Cu ajutorul pompei (8) s-a ridicat treptat presiunea în interiorul compensatorului la următoarele valori : 0,01 ; 0,02 ; 0,03 ; 0,04 ; 0,05 MPa. Rezultatele măsurărilor sînt prezentate în diagramele din figurile 9 și 10. Din aceste diagrame rezultă că :

a) tensiunile meridionale au valori maxime la vîrful lentilei ;

b) tensiunile meridionale maxime au valori negative datorită faptului că lentila se aplatisează sub acțiunea presiunii interioare ;

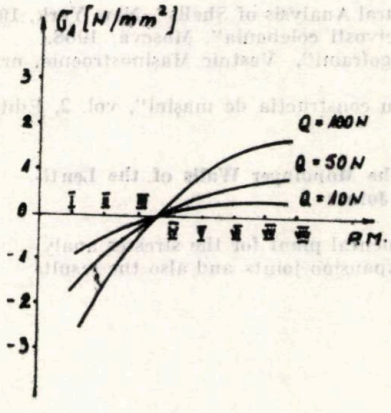


Fig. 11

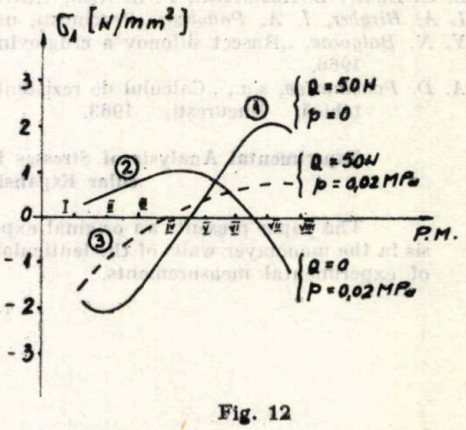


Fig. 12

c) placa inelară a lentilei are fibra exterioară supusă la întindere;

d) tensiunile inelare sînt mult mai mici decît cele meridionale și au valori maxime la baza și la vîrful lentilei.

Cazul IV — Compensator lenticular solicitat de o forță axială de compresiune, în prezența unei presiuni interioare constante

Cu ajutorul pompei (8) s-a ridicat presiunea în interiorul compensatorului la valoarea 0,02 MPa, această valoare menținîndu-se constantă în timpul determinărilor. În continuare compensatorul a fost solicitat de o forță axială de compresiune a cărei valoare a fost mărită treptat la valori cuprinse între 10 și 100 N. Rezultatele măsurărilor sînt prezentate în diagramele din figurile 11 și 12, din care rezultă că:

a) suprapunînd efectele, vîrful lentilei se descarcă de sarcină;

b) acțiunea presiunii interioare mărește capacitatea portantă a compensatorului lenticular (curba 3 — fig. 12).

c) situația cea mai dezavantajoasă este atunci cînd se suprapune acțiunea presiunii interioare peste o solicitare de întindere, cînd se dezvoltă tensiuni meridionale mari (de comprimare), în special la vîrful lentilei.

4. Concluzii

Cele patru cazuri de încărcare studiate, completează imaginea de ansamblu a stării de tensiuni din pereții compensatoarelor lenticulare monostrat punînd în evidență zonele cele mai solicitate, relevînd efectul suprapunerii diferitelor tipuri de solicitări.

Rezultatele experimentale, obținute cu ajutorul standului prezentat, sînt în concordanță cu determinările experimentale din literatura de specialitate, constituind în același timp un important reper de referință pentru abordarea teoretică a problemei.

BIBLIOGRAFIE

1. *E. H. Baker, L. Kovalevski, F. L. Rish*, „Structural Analysis of Shells", New York, 1972.
2. *I. A. Birgher, I. A. Panovco*, „Procinosti, ustoicivosti colebania", Moscva, 1968.
3. *V. N. Bulgacov*, „Rascet silfonov a cruglovimi goframi", Vestnic Mașinostroenie, nr. 5, 1966.
4. *A. D. Ponomariov, ș.a.*, „Calculul de rezistență în construcția de mașini", vol. 2, Editura tehică, București, 1963.

Experimental Analysis of Stresses in the Monolayer Walls of the Lenticular Expansion Joints

The paper presents an original experimental plant for the stresses analysis in the monolayer walls of the lenticular expansion joints and also the results of experimental measurements.

C.Z. : 621.43.01
681.3

INTERACTIVE SYSTEM FOR MINICOMPUTERS DEVELOPED FOR ENGINE CYCLES ANALYSIS IN CAR ENGINES

R. ALBOTEANU, CR. ANDREESCU, M. OPREAN, P. TOTHEZAN *

The paper describes a most powerfull aquisition and interactive processing system of experimental data acquired on the test bench from car engines.

The system enables the analysis of evolution of the heat engines phenomena for each crank angle in one or a succesion of engine cycles by following a lot of thermodynamic process defining parameters. Using this system also enables a statistic analysis of processes in order to compare the results.

The usefulness of the system comes out to the comparison of the real behaviour of internal combustion engines process with those predicted by mathematical simulation.

1. Introduction

The design of a computer based interactive system to be used in stand testing research of i.c.e.'s should take into consideration the 2 typical essentials of such research :

— the need to survey the overall engine operation ; this involves an open or close loop throughout the operational modes established, the acquisition and recording of the parameters defining this operation (parameters with quasi-stationary variation) and the availability of the result analysis-synthesis even immediately after the end of an experimental cycle ;

— the need to investigate and analyse the processes featured by i.c.e.'s (ex. cylinder pressure evolution) which are all fast processes and require a sampling rate which is often of the order of microseconds.

There is a growing concern, at present, for improving the acquisition systems with respect to the hardware [2] as well as the accompanying software [3] meant to best meet the requirements of test bench engine experimentator.

This refers mostly to matching some investigation methodologies already in use [4] with the higher performances with respect to the accuracy provided by the increasing use of computerized systems [5].

The present system is based to a great extent on the authors' experience [6] dealing with systems designed to facilitate bench research.

* Eng., INMT ; Lecturer ; Lecturer, chair of Autovehicles ; Eng., INMT

2. System Requirements

Modern systems should be thus conceived as to provide a real time data acquisition and processing liable to eventually supply the information required by improved design solutions.

The system should allow both stabilized and transient mode process analysis, the latter requiring a highly accurate estimation of the interdependence existing between slow and fast variation parameters which is not available in a classical approach. The main requirements resulting from this general outline of the system are :

a) with respect to quasi-stationary varying parameters :
- real time acquisition and display of parameters relative to the engine stand operation after a certain sequence ;
- engine operation command ;
- creation of a data-base referring to the parameters acquired ;
- off-line processing and display of characteristic or complex curves in the engine operation.

b) with respect to fast varying parameters :
- real time aquisition and display of fast variation parameters (cylinder pressures, intake manifold pressures, injection pressures, etc.) ;
- real time processing of fast variation parameters ;
- storage of the acquired data ;
- complex off-line processing (determination of polytropic index, determination of burning rate, etc.).

3. System Configuration

The hardware tailored for the use on heat engine research stand consists of two microcomputers specialized in data acquisition which are interconnected and coupled to a minicomputer (fig. 1).

Microcomputer A is based on a microprocessor 8086 and it features process input/output modules supplying 64 analogical inputs, 8 analogical outputs, 32 digital inputs and 32 digital outputs. Its modular structure makes it possible to expand the process input/output configuration as needed. This microcomputer fulfils the task of quasi-stationary data acquisition and commands the necessary corrections in the testing system depending on the user's programmed cycle.

Microcomputer B is also based on the 8086 processor but it is specialized in the acquisition of fast variation parameters occurring throughout an engine cycle or a sequence of engine cycles. It supplies the simultaneous acquisition of 8 parameters by using fast convertors and a D.M.A. The acquisition process is monitored by the information on engine cycle start-up and crankangle supplied by photoelectric transducers.

Primary information storage with a view to further processing may be achieved by using an analogical recorder which is capable to store and display the evolution of all fast variation parameters. Such proces-

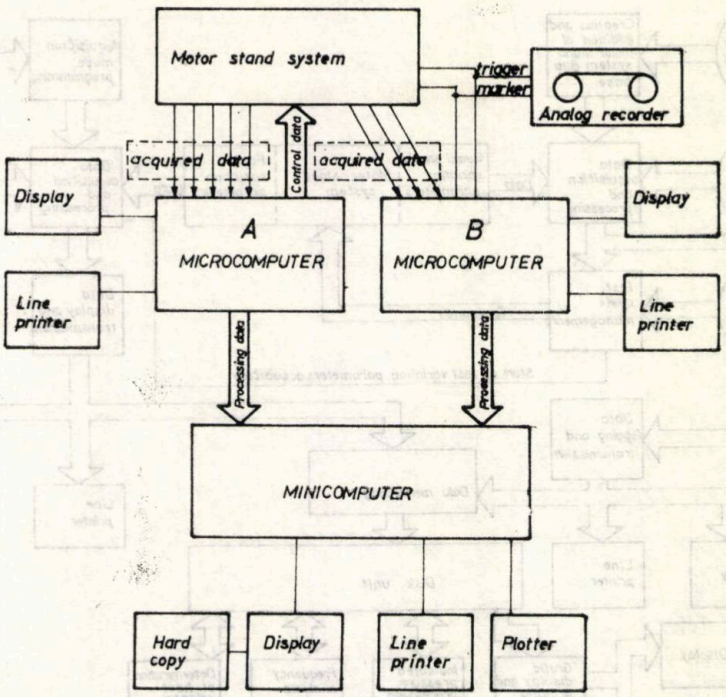


Fig. 1—The System Configuration

sing is achieved by directly coupling the analogical recorder to microcomputer B.

The two microcomputers may have an independent „stand-alone" operation or microcomputer A may start microcomputer B into triggering the acquisition of fast variation parameters. The two microcomputers are coupled in series with a minicomputer I 100 (PDP 11/34 compatible) all the data sets acquired being processed by the latter and stored on magnetic disk files.

4. System Operation

The program supply designed for this type of heat engine automatic testing includes programs for the microcomputers specialized in data acquisition and for the microcomputer ensuring the data set processing (fig. 2).

Programs lodging on microcomputer A allow the operator :

— to build up and up-date the data base covering the information on the quasi-stationary parameters to be acquired or computed (names, warning limits, conversion coefficients, etc.);

— to introduce the information relative to the engine research cycle whereupon the adjustment commands of the testing system are to be worked out;

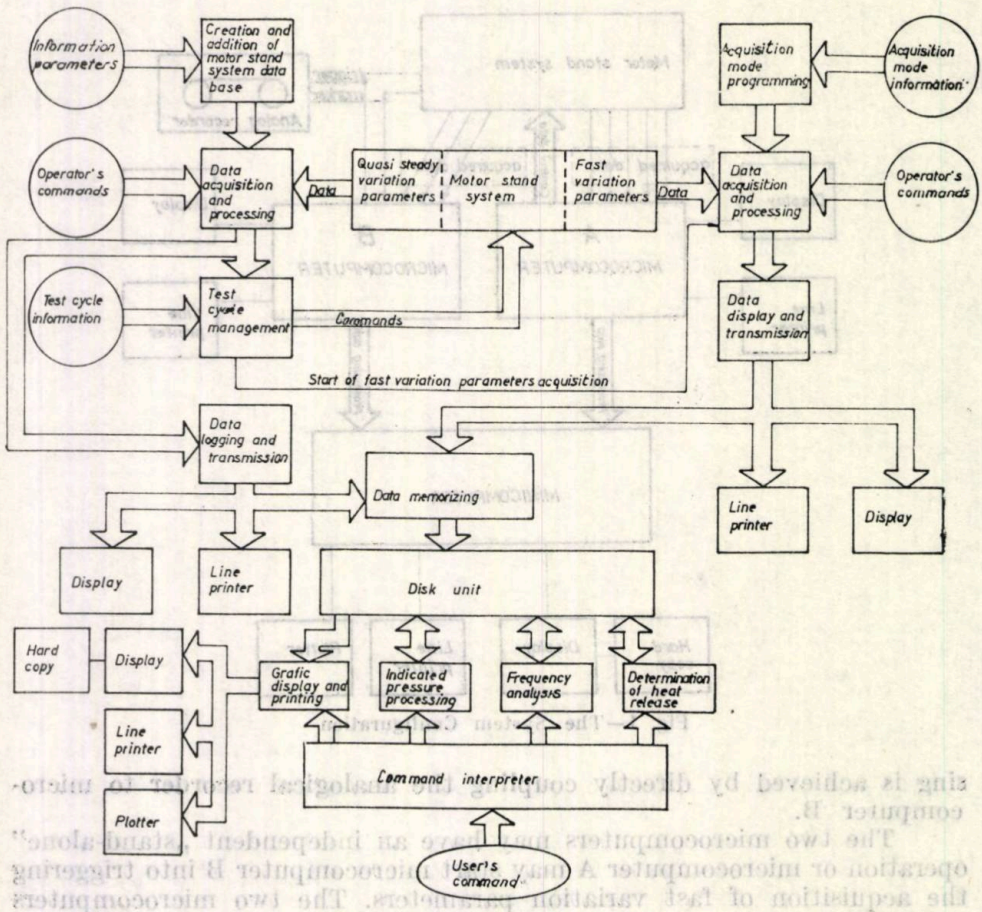


Fig. 2—The System Operation

— to set the display and printer into operation and to feed the minicomputer with the data corresponding to a certain operation point in the engine.

Programs lodging on microcomputer B allow the operator:

— to program the specialized module (number of channels to be multiplexed, number of successive cycles to be acquired, type of primary processing to be carried out on data-averaging, histograms, etc.);

— to graphically display certain results and to feed the minicomputer with the cycles acquired.

Minicomputer lodging programs provide the user with a set of commands specialized in the processing of typical heat engine data.

The user interface is ensured by an interpreter which checks the user's command and activates the programs required. Various processing systems required in the analysis and interpretation of the results acquired have been implemented within this system.

Both the primary data and the outcome of the processing may be graphically displayed by using a graphical display subsystem for plane curves.

5. Some System Applications

The above system allows an extremely complex processing of the diagram required in a very short time and with high accuracy. Such a particularly complex processing made available to the user of this system is the determination of the rate and main stages of the burning process. By processing the experimental data, the system makes possible the determination of the real burning rate even during the stand testing — the old time dream of all heat engine specialists. The burning rate is determined by starting from the equation of the energy balance for the working fluid during the burning process

$$Q_{dis} \cdot d\xi = dU + dL + dQ_p,$$

where Q_{dis} is the amount of heat available per cycle, $d\xi$ is the elementary variation of the fuel amount taken up by the burning process, while dU, dL and dQ_p are the elementary variations of the internal energy, the work and the heat transferred to the walls, respectively.

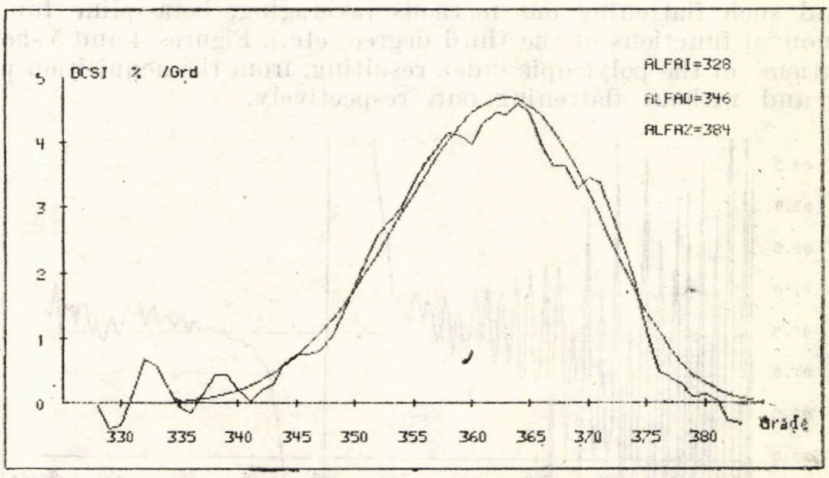


Fig. 3—The Combustion Rate

For future use, the system allows the determination of the analytical expression of the burning rate which hould approximate the real rate previously determined with the degree of accuracy required by the user (fig. 3).

The analytical expression of the burning rate makes it possible to determine, among others, the moments separating the three important stages of the process, as well.

Thus, the end of the stage when the flame nucleus has been formed and stabilized is considered to be the instant when 4% out of the fuel

inside the combustion chamber has been burnt. Theoretical investigations carried out by the authors [8] evidenced the fact that the burning of this amcunt of fuel ensure the stability required by the flame nucleus while the statistics comparing the pressure curves with and without burning confirm the accuracy of this method.

The end of the burning process, whose unanimous definition lies still in the future, is taken to be a function of the burning time resulting from the analytical law previously stated. The criterion which held true when compared to other criteria (intersection of adiabatic and polytropic index curves, temperature reduction with respect to maximum cycle value) yielded good results.

An interesting element relative to curve interpretation refers to the determination of the polytropic index evolution throughout the working cycle. Mention should be made that an account of the procedure used in the computing of the polytropic index value, determined by relation :

$$m = (\log p_2 - \log p_1)/(\log V_1 - \log V_2),$$

the results thus obtained are strongly influenced by the noise superposed on the cylinder pressure curve. In order to obtain some pertinent values with respect to the real phenomenon under interpretation it is imperative to use some methods for flattening out the diagram under consideration and the polytropic index. The system makes available to the user several such flattening out methods (averaging, beta-spline functions, polynomial functions of the third degree, etc.). Figures 4 and 5 show the variations of the polytropic index resulting, from the acquisition process with and without flattening out, respectively.

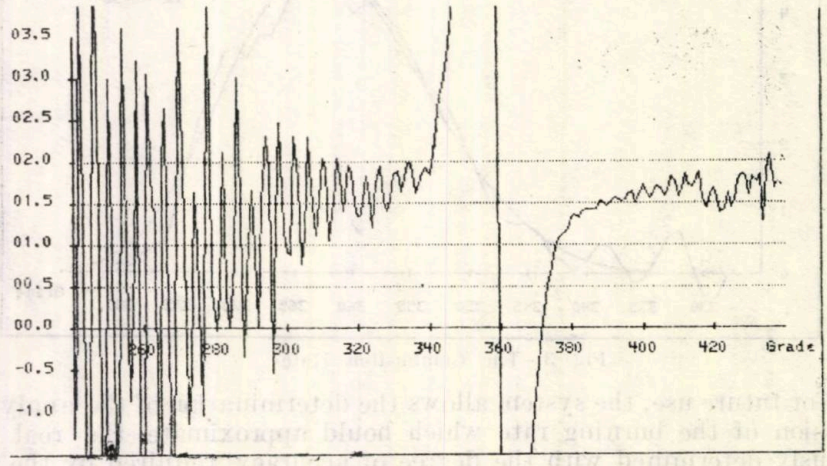


Fig. 4—Variation of the Polytropic Index without Flattening

The computer analysis of the variation mode of the polytropic index may provide data referring to the precise location of the top dead centre, an essential element in interpreting some sophisticated results concerning the engine operation such as the one previously shown.

The program allows the displacement of the pressure curves recorded around the top dead centre and the processing of the variation curve of the polytropic index, which makes it possible to check the location of the top dead centre, as can be seen in fig. 6, where several variation curves of the polytropic index for various t.d.c. positions have been superposed.

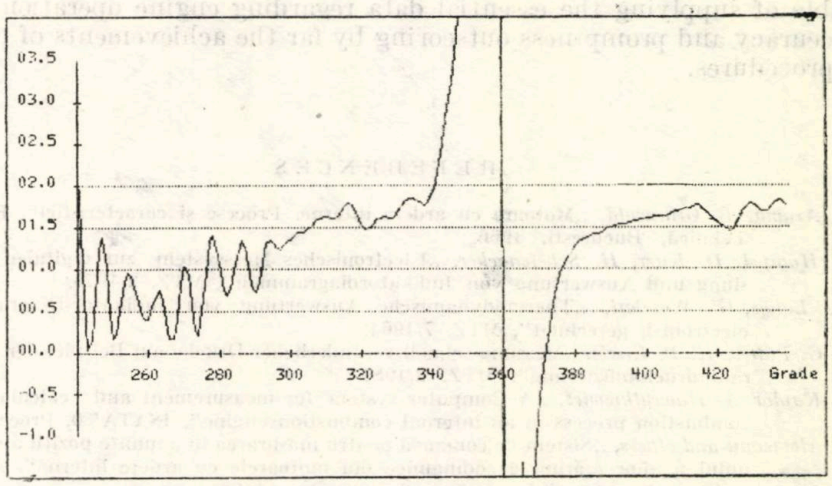


Fig. 5—Variation of the Polytropic Index with Flattening

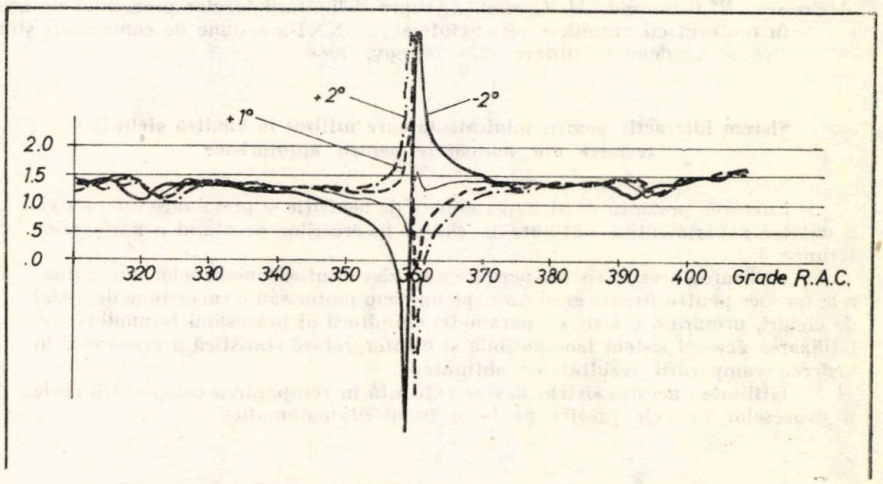


Fig. 6—Variations of the Polytropic Index for Various t.d.c. Positions

On account of the accuracy of this method the program has been provided with a testing subroutine for warning the user on existing errors in the location of the t.d.c.

6. Conclusions

The implementation of this system provides, first, the optimum conditions for acquiring and processing the data obtained on the heat engine stand in general and, second, its immediate application to the car engines for which the system had been originally devised.

For the researcher in this field, the system is a workable instrument capable of supplying the essential data regarding engine operation with an accuracy and promptness outscoring by far the achievements of classical procedures.

REFERENCES

1. *C. Aramă, B. Grünwald*, „Motoare cu ardere internă. Procese și caracteristici", Editura Tehnică, București, 1966.
2. *R. Hampel, D. Kurr, H. Schefenacker*, „Electronisches Messsystem zur digitalen Erfassiung und Auswertung von Indikatordiagrammen", MTZ, 2/1975.
3. *W. Lange, G. Woschni*, „Thermodynamische Auswertung von Indikator-Diagrammen, electronish gerechnet", MTZ, 7/1964.
4. *R. G. Pütter, H. P. Eisele*, „Messung schnell veränderlicher Drücke am Beispiel der Brennraumdruckindizierung", MTZ, 2/1986.
5. *A. Kaplor A. Hawryłkiewicz*, „A Computer system for measurement and calculation of combustion process in an internal combustion engine", ISATA'80, Proceedings.
6. *R. Alboteanu and others*, „Sistem de comandă pentru măsurarea în anumite poziții ale pistonului a unor mărimi gazodinamice din motoarele cu ardere internă", A IV-a sesiune de comunicări INMT, 24—25 nov. 1983.
7. *P. Tothezan and others*, „Sisteme de achiziție a parametrilor cu variație lentă", A V-a sesiune de comunicări INMT, 24—25 oct. 1985.
8. *Cr. Andreescu, B. Grünwald, M. Oprean*, „Asupra delimitării fazelor procesului de ardere în motorul cu aprindere prin scînteie", A XXI-a sesiune de comunicări științifice a Academiei Militare, 27—28 nov. 1986.

Sistem interactiv pentru minicalculatoare utilizat la analiza ciclurilor termice din motoarele pentru autoturisme

Lucrarea prezintă un sistem complex de achiziție și prelucrare interactivă a datelor experimentale obținute în cadrul încercărilor pe stand a motoarelor termice.

Utilizarea acestui sistem permite analiza evoluției fenomenelor din motoarele termice pentru fiecare grad r.a.c. pe un ciclu motor sau o succesiune de astfel de cicluri, urmărind o serie de parametri definitorii ai procesului termodinamic. Utilizarea acestui sistem face posibilă și o interpretare statistică a proceselor în vederea comparării rezultatelor obținute.

Utilitatea acestui sistem devine evidentă în compararea comportării reale a proceselor cu cele prezise pe baza simulării matematice.

C.Z.: 624.043

STRAIN GAUGE FORCE TRANSDUCERS WITH S-SHAPED ELASTIC ELEMENTS

D. M. ȘTEFĂNESCU *,

The paper presents the main characteristics of S-shaped elastic elements used in strain gauge instrumented force cells.

From the large variety of constructive shapes, two variants are presented which were made at the Materials Testing Laboratory (P.I.B.) and metrologically certified.

The S-shaped elastic elements have a high strain sensitivity, being subjected to „multiple bending". Their load range is between 500 N and 20 kN.

Their main advantages are the following [2, 3, 4]:

— cheap, solid, compact, one-piece construction;

— easy to mount — for instance, to be fixed between the crosshead of the testing machine and the specimen;

— subject both to tension and compression;

— insensitive to side loads;

— linear stress — strain characteristic;

— signal independent of the load position. However, the threaded holes at the two end points allow for the perfectly axial application of forces and, at the same time, they ensure the efficient protection against compression overloads, together with the mounting bolts adjusted at the deflection limit measured for the nominal load.

When the elastic element is loaded, its central part undergoes a combined stress (shear, bending, tension/compression) but, through the strain gauge positioning and bridge connection, the device can measure only the signal produced by the shear stress. In order to measure the principal strains there are used two pairs of strain gauges, placed exactly in the centre, at $\pm 45°$ against the neutral axis, on the two sides of the sensitive element and having a full Wheatstone bridge connection.

Since the elastic element is made up of two antisymmetrical yokes, the analytical calculus can be made by the classical formulas from the strength of materials [1]. A more precise calculus can be made by the finite elements method which also permits the choice of the optimum shape from the sensitivity point of view, but this will be the topic of another paper.

One can notice a large constructional variety in the documentation offered by the firms manufacturing transducers with S-shaped elastic elements: parallelipipaedic block with two antisymmetrical slots of different shapes, with or without holes and/or millings in the central part.

The paper presents two different types of S-shaped elastic elements, used in the tensile testing of thin wires (fig. 1) and in the bending testing of composite materials (fig. 2). Being made from V2A steel, they measure forces of up to 5 kN and 12 kN respectively. The strain gauges used are 3/120 XA 21 rosettes (H.B.M.) bonded by Z 70 adhesive and protected by AK 22 mastic. There are used circular mini KPT 02 E 10—6S couplings (Conect).

The two force transducers produced by our Research Laboratory for Material Testing from Polytechnical Institute of Bucharest [5] have

* Senior Eng., Research Laboratory of Material Testing

Table 1

Force F [kN]	Average indication I [μm/m]		Fidelity error e_f [%]		Linearity error e_l [%]		Return error e_r [%]
	Loaded	Unloaded	Loaded	Unloaded	Loaded	Unloaded	
0	0	0	0	0	0	0	0
0,5	156	157	0,06	0,06	−0,06	0,06	0,13
1	311	315	0	0,13	−0,19	0,06	0,25
1,5	468	472	0	0,06	−0,25	0	0,25
2	626	630	0	0	−0,19	0,06	0,25
2,5	784	788	0,06	0,06	−0,13	0,13	0,25
3	941	945	0,06	0,06	−0,13	0,13	0,25
3,5	1099	1102	0	0,06	−0,06	0,13	0,19
4	1257	1260	0,06	0,06	−0,06	0,13	0,19
4,5	1415	1415	0,06	0,06	0	0	0
5	1572	—	0	—	—	—	—

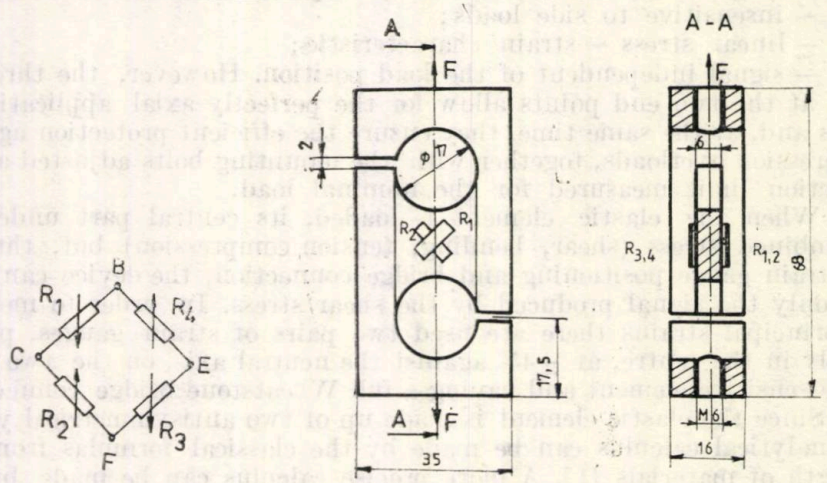


Fig. 1

Table 2

Force F [kN]	Average indication I [μm/m]		Fidelity error e_f [%]		Linearity error e_l [%]		Return error e_r [%]
	Loaded	Unloaded	Loaded	Unloaded	Loaded	Unloaded	
0	0	0	0	0	0	0	0
2	236	235	0,10	0,07	−0,28	−0,25	−0,07
4	475	475	0,14	0,07	−0,35	−0,35	0
6	715	715	0,14	0	−0,35	−0,35	0
8	955	955	0,07	0,07	−0,42	−0,42	0
10	1199	1199	0	0	−0,14	−0,14	0
12	1441	—	0,07	—	0	—	—

been tested at the National Institute of Metrology — Timişoara. The results listed in the measuring tables (tab. 1 and tab. 2) include the two transducers in the 0.5 range of precision. The corresponding, evidently linear calibration curves are presented in figure 3.

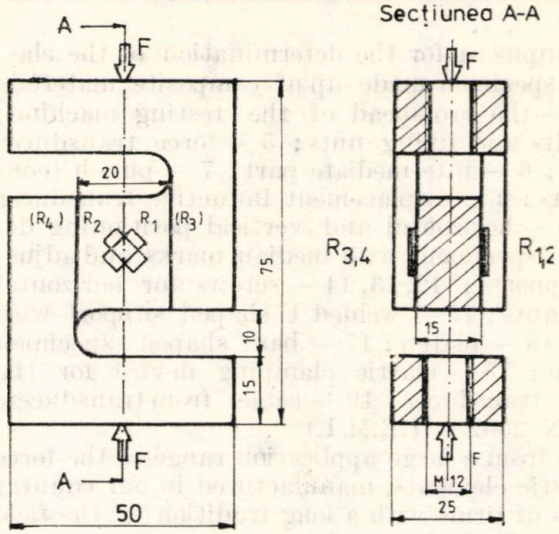


Fig. 2

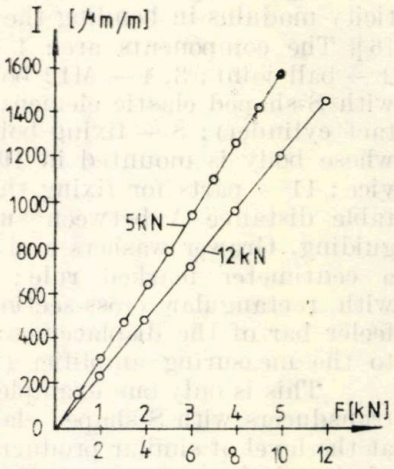


Fig. 3

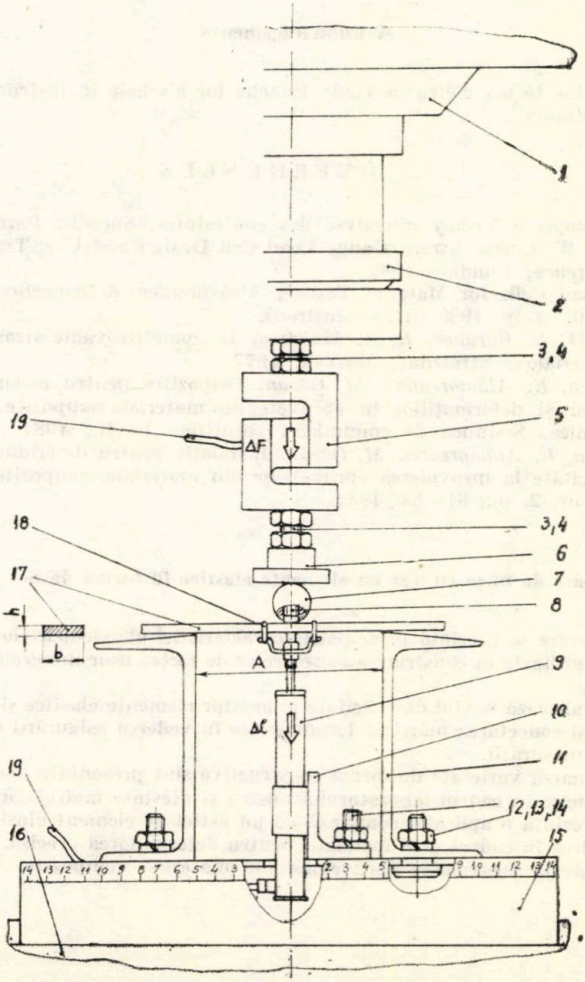


Fig. 4

Figure 4 presents the equipment for the determination of the elasticity modulus in bending the specimen made up of composite materials [6]. The components are: 1 — the crosshead of the testing machine; 2 — ball joint; 3, 4 — M12 bolts and fixing nuts; 5 — force transducer with S-shaped elastic element; 6 — intermediate part; 7 — punch (contact cylinder); 8 — fixing bolts; 9 — displacement inductive transducer whose body is mounted in 10 — horizontal and vertical positioning device; 11 — parts for fixing the specimen, with median marks and adjustable distance A between supports; 12, 13, 14 — screws for horizontal guiding, Grower washers and nuts; 15 — welded U-shaped support with a centimeter marked rule; 16 — platen; 17 — bar shaped specimen with rectangular cross-section; 18 — elastic clamping device for the feeler bar of the displacement transducer; 19 — cables from transducers to the measuring amplifier (N 2302 — I.E.M.I.).

This is only one example from a large application range of the force transducers with S-shaped elastic elements, manufactured in our country at the level of similar products of firms with a long tradition in the field of electrical measurement of mechanical quantities.

Acknowledgements

Thanks are due to my colleague Radu Enache for his help in instrumenting the strain gauge force transducers.

REFERENCES

1. *J. Avril*, Encyclopedie Vishay d'analyse des contraintes. Socedit, Paris, 1974.
2. *C. S. Bahra, J. W. Evans*, Strain Gauge Load Cell Design and Use. Transducer Tempcon Conference, London. 1983.
3. *R. D. Lohr*, Load Cells for Material Testing. Measurement & Inspection Technology, pg. 37—40, July 1980 (Rep. Instron).
4. *A. B. Renski, D. S. Baranov, R. A. Makarov*, Tenzometrirovanie stroitelnih konstrukţii i materialov. Stroizdat, Moskva, 1977.
5. *D. M. Ştefănescu, E. Alămoreanu, M. Găvan*, Dispozitiv pentru măsurarea simultană a forţelor şi deformaţiilor în epruvete din materiale compozite supuse la solicitări mecanice. Sesiunea de comunicări ştiinţifice I.P.B., 1984.
6. *D. M. Ştefănescu, E. Alămoreanu, M. Găvan*, Instalaţie pentru determinarea modulelor de elasticitate la încovoierea epruvetelor din materiale compozite. Metrologia aplicată, nr. 2, pg. 81—84, 1984.

Captoare de forţe cu Ter cu elemente elastice în formă de S

În lucrare se prezintă principalele caracteristici ale elementelor elastice în formă de S utilizate în construcţia captoarelor de forţe, uşor integrabile în lanţul de măsurare.

Se analizează modul de solicitare a acestor elemente elastice şi se stabilesc amplasarea şi conectarea mărcilor tensometrice în vederea asigurării sensibilităţii maxime a măsurării.

Din marea varietate de forme constructive sînt prezentate două variante, realizate practic în cadrul laboratorului nostru şi atestate metrologic.

Se prezintă o aplicaţie complexă cu un astfel de element elastic în formă de S: folosirea în cadrul unei instalaţii pentru determinarea precisă a modulelor de elasticitate la încovoierea epruvetelor din materiale compozite.

C.Z.: 624.04
621.8.02

CONSIDERAȚII ASUPRA METODEI CENTRULUI ELASTIC

MARINA PANDREA *

În lucrare se utilizează centrul elastic și proprietățile acestuia pentru caclulul sistemelor plane static nedeterminate. În acest sens, se demonstrează că problema ridicării nedeterminărilor în sisteme plane cu un singur contur se reduce la un calcul de geometrie a maselor, respectiv la calculul direcțiilor și momentelor mecanice principale centrale de inerție ale barei echivalente, geometric identică cu bara dată, dar care are densitatea numeric egală cu inversul momentului geometric axial de inerție al secțiunii normale.

1. Introducere

Metoda centrului elastic utilizată în special pentru ridicarea nedeterminărilor la arcele dublu încastrate, [3], [6], a găsit în ultimul timp aplicații majore în calulul mecanismelor cu cuple cinematice elastice [3] precum și în calculul mecanismelor de complianță ale roboților industriali folosiți în operațiile de montaj.

Prezenta lucrare se situează, de asemenea, pe linia utilizării proprietăților centrului elastic și anume, în calculul unor sisteme plane static nedeterminate. În acest sens se demonstrează că problema ridicării nedeterminărilor în sisteme plane cu un singur contur se reduce la calculul geometriei maselor echivalente, respectiv la calculul centrului de greutate și al momentelor mecanice de inerție.

Modul de lucru cu această metodă este prezentat atît în cazul general cît și în cazuri particulare pe trei exemple rezolvate în partea finală a lucrării.

2. Centrul elastic. Axe principale de elasticitate

Considerăm sistemul format din bara elastică plană 1 încastrată în A și placa rigidă 2 solidară în B cu bara 1 (fig. 1).

Fie D un punct al plăcii în care acționează forțele X_1, X_2 pe direcțiile Dx, Dy și momentul X_3.

Dacă utilizăm notațiile:

x, y — distanțele de la un punct oarecare M al barei pînă la axele Dx, Dy.

* Șef lucrări ing., Institutul de subingineri Pitești

E —modulul de elasticitate longitudinal,
I —momentul geometric de inerţie axial,
ds—elementul de arc al barei,
atunci coeficienţii de influenţă în ipoteza neglijării influenţei forţelor axiale şi tăietoare, se exprimă prin relaţiile :

$$\delta_{11} = \frac{1}{E}\int_{AB}\frac{1}{I}y^2\,ds\,;\quad \delta_{22} = \frac{1}{E}\int_{AB}\frac{1}{I}x^2\,ds\,;\quad \delta_{33} = \frac{1}{E}\int_{AB}\frac{1}{I}\,ds \tag{1}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{E}\int_{AB}\frac{1}{I}y\,ds\,;\quad \delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{E}\int_{AB}\frac{1}{I}x\,ds\,;$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{E}\int_{AB}\frac{1}{I}xy\,ds \tag{2}$$

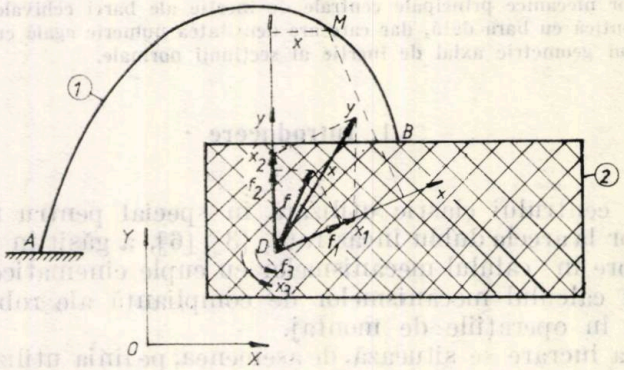


Fig. 1 — Forţele X_1, X_2, X, momentul X_3, deplasările liniare f_1, f_2, f şi deplasarea unghiulară f_3 din punctul D

iar deplsările liniare f_1, f_2 şi deplasarea unghiulară f_3 se scriu :

$$\begin{aligned} f_1 &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 \\ f_2 &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 \\ f_3 &= \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 \end{aligned} \tag{3}$$

Decuplarea deplasărilor liniare faţă de deplasarea unghiulară are loc dacă $\delta_{13} = \delta_{23} = 0$ respectiv dacă :

$$\int_{AB}\frac{1}{I}y\,ds = 0\,;\quad \int_{AB}\frac{1}{I}x\,ds = 0 \tag{4}$$

Potrivit cu lucrările [3], [6] punctul D în care se realizează decuplarea deplasărilor liniare faţă de deplasarea unghiulară se numeşte centru elastic.

Expresiile (4) arată că centrul elastic D coincide cu centrul de greutate al barei echivalente cafe este geometric identică cu bara AB și care are densitatea liniară numeric egală cu $\frac{1}{I}$.

În ipoteza că momentul geometric de inerție I este constant, atunci centrul elastic D coincide cu centrul geometric de greutate al barei AB.

Punctul D fiind centrul de greutate al barei echivalente, are coordonatele X_D, Y_D față de un sistem de referință OXY

$$X_D = \frac{S_y}{\widetilde{m}} \; ; \qquad Y_D = \frac{S_x}{\widetilde{m}} \tag{5}$$

unde $\widetilde{m}$ este masa barei echivalente

$$\widetilde{m} = \int_{AB} \frac{1}{I} \, ds \tag{6}$$

iar S_y, S_x sînt momentele statice ale barei echivalente

$$S_y = \int_{AB} \frac{1}{I} X \, ds \; ; \qquad S_x = \int_{AB} \frac{1}{I} Y \, ds \tag{7}$$

Decuplarea deplasărilor liniare f_1, f_2 între ele, conduce la anularea coeficientului de influență δ_{12}, respectiv conduce la relația :

$$\int_{AB} \frac{1}{I} y \, ds = 0 \tag{8}$$

și sistemul (3) se scrie

$$f_1 = \delta_{11} X_1 ; \quad f_2 = \delta_{22} X_2 ; \quad f_3 = \delta_{33} X_3 \tag{9}$$

Componentele f_1, f_2 reprezintă proiecțiile deplasării liniare f pe axele Dx, Dy respectiv reprezintă componente covariante ale vectorului f. Aceasta înseamnă că dacă axele Dx, Dy nu sînt perpendiculare, atunci cînd acționăm cu o singură forță X_1 pe direcția axei Dx se obține o deplasare f perpendiculară pe axa Dy, iar proiecția acestei deplasări pe axa Dx este

$$f_1 = \delta_{11} X_1 \tag{10}$$

Dacă axele Dx, Dy sînt perpendiculare, atunci forța X_1 care acționează pe axa Dx produce o deplasare f_1 coliniară cu aceasta și în mod analog forța X_2 care acținoează pe axa Dy produce o deplasare f_2 situată pe axa Dy (fig. 2).

În acest caz axele Dx, Dy se numesc axe principale de elasticitate.

Direcțiile axelor principale de elasticitate se obțin din relația (8) din care mai rezultă că acestea coincid cu axele principale de inerție ale

barei echivalente, deoarece momentul de inerție mecanic centrifugal definit de relația (8) este nul.

Notînd cu J_x, J_y momentele mecanice principale de inerție și ținînd seama de relațiile (1) și (6) se obțin pentru coeficienții de influență δ_{11}, δ_{22}, δ_{33}, expresiile :

$$\delta_{11} = \frac{J_x}{E} \; ; \quad \delta_{22} = \frac{J_y}{E} \; ; \quad \delta_{33} = \frac{\widetilde{m}}{E} \tag{11}$$

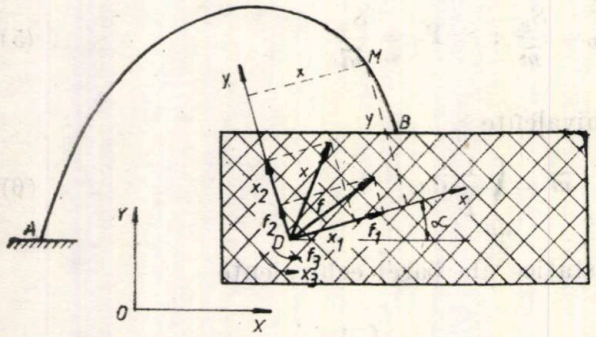


Fig 2 — Axele principale de elasticitate

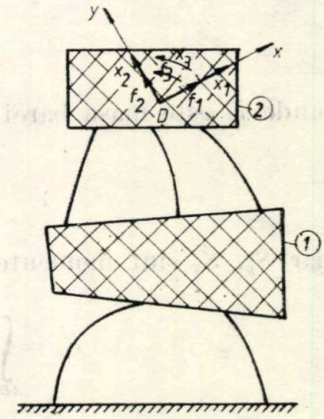


Fig. 3 — Centrul elastic și direcțiile principale elastice ale unui sistem plan hibrid →

În cazul în care bara AB admite axa de simetrie mecanică, atunci acestea sînt și axe principale de elasticitate.

Determinarea unghiului α și deci a direcțiilor principale de elasticitate se poate face din relația (8) cu ajutorul momentelor mecanice de inerție ale barei echivalente în raport cu axele sistemului de referință OXY.

Într-adevăr, ținînd seama de relațiile

$$x = (X - X_D)\cos\alpha + (Y - Y_D)\sin\alpha$$

$$y = -(X - X_D)\sin\alpha + (Y - Y_D)\cos\alpha \tag{12}$$

$$J_X = \int_{AB} \frac{1}{I} Y^2 \, ds \; ; \quad J_Y = \int_{AB} \frac{1}{I} X^2 \, ds \; ; \quad J_{XY} = \int_{AB} \frac{1}{I} XY \, ds \tag{13}$$

din ecuația (8) se obține

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{J_{XY} - \widetilde{m} X_D Y_D}{J_X + J_Y - \widetilde{m}(X_D^2 + Y_D^2)} \tag{14}$$

Într-un caz mai general, centrul elastic al unui sistem plan hibrid (format din bare elastice și corpuri rigide), (fig. 3), se poate defini ca

fiind punctul D în care se realizează decuplarea deplasărilor liniare față de deplasarea unghiulară.

În această situație, dacă se acționează în punctul D cu o forță, se obține o deplasare de translație a corpului ②, iar dacă se acționează în punctul D cu un moment X_3, se obține o deplasare de rotație a corpului ②.

Dacă se poate obține și o decuplare a celor două deplasări liniare f_1, f_2, atunci axele Dx și Dy sînt și axe principale de elasticitate.

3. Metoda centrului elastic

Considerăm sistemul format din bara plană AB (fig. 4.a) încastrată la ambele capete A, B și încărcată cu un sistem de forțe exterioare.

Sistemul considerat este echivalent cu sistemul din fig. 4.b format din bara elastică AB notată cu ① și placa rigidă ② solidară în B cu bara ① și încastrată în punctul D.

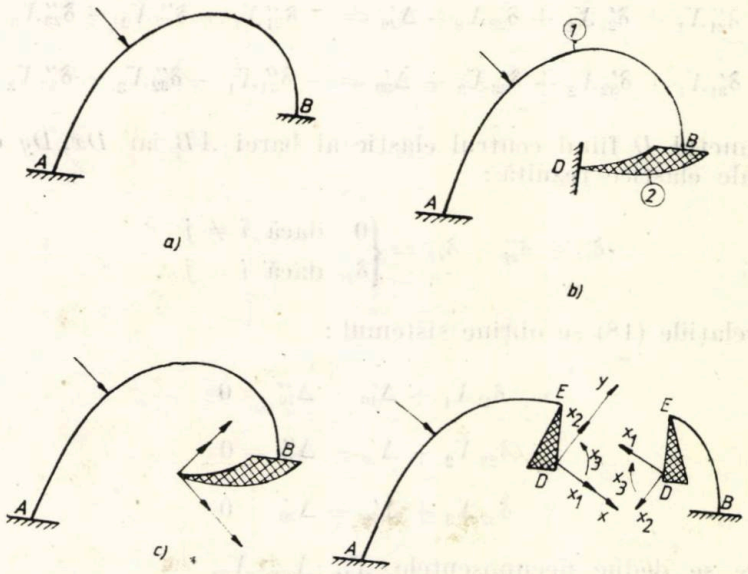


Fig. 4 — Alegerea sistemelor de bază

Considerînd că punctul D este chiar centrul elastic al barei AB, putem alege ca formă de bază sistemul reprezentat în fig. 4.c și notînd cu Δ_{10}, Δ_{20}, Δ_{30} deplasările pe forma de bază produse de sarcinile exterioare pe direcția componentelor necunoscute X_1, X_2, X_3, rezultă sistemul :

$$\Delta_{10} = \delta_{11} X_1 = 0 \; ; \quad \Delta_{20} + \delta_{22} X_2 = 0 \; ; \quad \Delta_{30} + \delta_{33} X_3 = 0 \qquad (15)$$

din care se obțin necunoscutele X_1, X_2, X_3.

Torsorul reacțiune din B se află prin reducerea torsorului din D în B.

Pentru forță se obțin componentele :

$$X_{1B} = X_1 ; \quad X_{2B} = X_2 \tag{16}$$

iar momentul are exprimarea :

$$X_{3B} = X_3 - x_B X_2 + y_B X_1 \tag{17}$$

unde x_B, y_B sînt coordonatele punctului B în sistemul de referință Dxy.

Dacă se secționează bara într-un punct E se pot considera formele de bază din fig. 4.d.

Din egalitatea deplasărilor din punctul D, ținînd seama de sensurile diferite ale forțelor pe cele două forme rezultă

$$f_1 = \delta'_{11}X_1 + \delta'_{12}X_2 + \delta'_{13}X_3 + \Delta'_{10} = -\delta''_{11}X_1 - \delta''_{12}X_2 - \delta''_{13}X_3 + \Delta''_{10}$$

$$f_2 = \delta'_{21}X_1 + \delta'_{22}X_2 + \delta'_{23}X_3 + \Delta'_{20} = -\delta''_{21}X_1 - \delta''_{22}X_2 - \delta''_{23}X_3 + \Delta''_{20} \tag{18}$$

$$f_3 = \delta'_{31}X_1 + \delta'_{32}X_2 + \delta'_{33}X_3 + \Delta'_{30} = -\delta''_{31}X_1 - \delta''_{32}X_3 - \delta''_{33}X_3 + \Delta''_{30}$$

Punctul D fiind centrul elastic al barei AB iar Dx, Dy direcțiile principale elastice rezultă :

$$\delta'_{ij} + \delta''_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \neq j \\ \delta_{ii} & \text{dacă } i = j \end{cases} \tag{19}$$

și din relațiile (18) se obține sistemul :

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \Delta'_{10} - \Delta''_{10} &= 0 \\ \delta_{22}X_2 + \Delta'_{20} - \Delta''_{20} &= 0 \\ \delta_{33}X_3 + \Delta'_{30} - \Delta''_{30} &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

din care se deduc necunoscutele X_1, X_2, X_3.

Dacă sistemul este geometric simetric, cu încărcare simetrică, rezultă relațiile :

$$\delta''_{ij} = \delta'_{ij} \; ; \quad \Delta''_{10} = -\Delta'_{10} ; \quad \Delta''_{20} = -\Delta'_{20} ; \quad \Delta''_{30} = -\Delta'_{30} \tag{21}$$

și sistemul (20) se scrie,

$$\delta'_{11}X_1 + \Delta'_{10} = 0 ; \quad X_2 = 0 ; \quad \delta'_{33}X_3 + \Delta'_{30} = 0 \tag{22}$$

Torsorul eforturilor din punctul E are componentele :

$$X_{1E} = X_1 ; \; X_{2E} = X_2 ; \; X_{3E} = X_3 - x_E X_2 + y_E X_1 \tag{23}$$

Dacă sistemul este geometric simetric dar încărcarea nu este simetrică se obține sistemul :

$$2\,\delta'_{11}X_1 + \Delta'_{10} - \Delta''_{10} = 0\,;$$

$$2\,\delta'_{22}X_2 + \Delta'_{20} - \Delta''_{20} = 0\,; \quad 2\,\delta'_{33}X_3 + \Delta'_{30} - \Delta''_{30} = 0 \tag{24}$$

4. Relații de calcul

În vederea aplicării metodei centrului elastic este necesar a determina deplasările $\Delta_{i0}(i = 1, 2, 3)$ produse în sistemul de bază de forțele exterioare pe direcțiile principale de elasticitate.

În acest sens, vom determina deplasările $\Delta_{i0}(i = 1, 2, 3)$ produse de o forță concentrată și de un moment concentrat.

Forța concentrată P care acționează în punctul K (fig. 5) are funcția de moment

$$M = P_x(x - x_k) - P_y(y - y_k) \tag{25}$$

P_x, P_y fiind proiecțiile forței P iar x_k, y_k coordonatele punctului K în sistemul Dxy.

Se obțin deplasările :

$$\Delta_{10} = \frac{1}{E}\int_{AK} y\,M\frac{ds}{I}\,; \quad \Delta_{20} = -\frac{1}{E}\int_{AK} x\,M\frac{ds}{I}\,; \quad \Delta_{30} = \frac{1}{E}\int_{AK} M\frac{ds}{I} \tag{26}$$

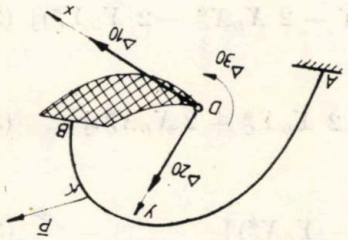


Fig. 5 — Deplasările produse de forța concentrată P pe direcțiile principale

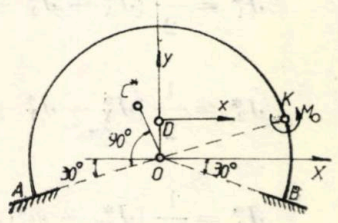


Fig. 6 — Sistem simetric acționat de un moment concentrat

Utilizînd notațiile :

m^* —masa barei echivalente AK,

C^* —centrul de greutate al barei echivalente AK,

x_c^*, y_c^*—coordonatele punctului C^* în sistemul Dxy,

J_x^*, J_y^*, J_{xy}^* —momentele mecanice de inerție ale barei echivalente AK față de axele sistemului Dxy,

M_D^* — momentu' forței P față de punctul C,

se obțin pentru deplasările (26) expresiile :

$$\Delta_{10} = \frac{1}{E}(P_x J_x^* - P_y J_{xy}^* + m^* y_c^* M_D^*) \tag{27}$$

$$\Delta_{20} = \frac{1}{E}(-P_x J^*_{xy} - P_y J^*_y - m^* x^*_c M^*_D) \tag{28}$$

$$\Delta_{30} = \frac{m^*}{E} M^*_D \tag{29}$$

Pentru aplicarea acestei relații se are în vedere faptul că majoritatea parametrilor sînt exprimați în sistemul OXY.

Trecerea la sistemul Dxy se face pe baza relațiilor;

$$P_x = P_X \cos\alpha + P_Y \sin\alpha\,;\; P_y = -P_X \sin\alpha + P_Y \cos\alpha \tag{30}$$

$$m^* = \int_{AK} \frac{ds}{I} \tag{31}$$

$$X^*_c = \frac{1}{m^*}\int_{AK} X\frac{ds}{I}\,;\quad Y^*_c = \frac{1}{m^*}\int_{AK} Y\frac{ds}{I} \tag{32}$$

$$x^*_c = (X^*_c - X_D)\cos\alpha + (Y^*_c - Y_D)\sin\alpha \tag{33}$$

$$y^*_c = -(X^*_c - X_D)\sin\alpha + (Y_c - Y_D)\cos\alpha \tag{34}$$

$$J^*_1 = \frac{1}{2}[J^*_X + J^*_Y + m^*(X^2_D + Y^2_D X - 2X_D X^*_C - 2Y_D Y^*_C)] \tag{35}$$

$$J^*_2 = \frac{1}{2}[J^*_X - J^*_Y + m(Y^2_D - X^2_D - 2Y_D Y^*_C + 2X_D X^*_C)] \tag{36}$$

$$J^*_3 = \frac{1}{2}[J^*_{xy} + m^*(X_D Y_D - X_D Y^*_C - Y_D X^*_C)] \tag{37}$$

$$J^*_x = J^*_1 + J^*_2 \cos 2\alpha - J^*_3 \sin 2\alpha \tag{38}$$

$$J^*_y = J^*_1 - J^*_2 \cos 2\alpha + J^*_3 \sin 2\alpha \tag{39}$$

$$J^*_{xy} = J^*_2 \sin 2\alpha + J^*_3 \cos 2\alpha \tag{40}$$

Pentru un moment concentrat M_0 care acționează în punctul K, procedînd în mod analog, se obțin deplasările:

$$\Delta_{10} = \frac{M_0 y^*_c m^*}{E}\,;\quad \Delta_{20} = \frac{M_0 x^*_c m^*}{E}\,;\quad \Delta_{30} = \frac{M_0 m^*}{E} \tag{41}$$

Aplicarea metodei centrului elastic implică următoarele etape :

— determinarea masei echivalente $\widetilde{m}$ cu relația (6),

— determinarea coordonatelor centrului elastic cu formulele (5) pentru bare curbe sau prin metoda tabelară pentru un sistem compus din mai multe bare,

— determinarea momentelor de inerție J_X, J_Y, J_{XY} față de axele OXY,

— determinarea unghiului α cu relația (14),

— determinarea momentelor de inerție J_x, J_y, cu ajutorul relațiilor

$$J_1 = \frac{1}{2}[J_X + J_Y - \widetilde{m}(X_D^2 + Y_D^2)] \tag{42}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}[J_X - J_Y + \widetilde{m}(X_D^2 - Y_D^2)] \tag{43}$$

$$J_3 = \frac{1}{2}(J_{XY} - m\, X_D Y_D) \tag{44}$$

$$J_x = J_1 + J_2 \cos 2\alpha - J_3 \sin 2\alpha \tag{45}$$

$$J_y = J_1 - J_2 \cos 2\alpha + J_3 \sin 2\alpha \tag{46}$$

— determinarea coeficienților de influență δ_{11}, δ_{22}, δ_{33} cu relațiile (11),

— determinarea deplasărilor Δ_{10}, Δ_{20}, Δ_{30} (pentru forțe concentrate și momente concentrate se pot aplica relațiile (27)—(40)),

— determinarea componentelor X_1, X_2, X_3, din încastrarea D,

— determinarea momentului din încastrarea B cu relația (17).

5. Aplicații

a) Să se determine reacțiunile din încastrarea B a barei omogene de arc de cerc din fig. 6 încărcată cu momentul concentrat M_0.

Bara fiind simetrică față de axa OY, centrul elastic D coincide cu centrul de greutate și rezultă :

$$\widetilde{m} = \frac{4\pi R}{3I}$$

$$X_D = 0\,; \quad Y_D = \frac{2}{3} R \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{2\pi} = 0{,}276\, R$$

Momentele de inerţie J_X, J_Y au exprimările :

$$J_X = \int Y^2 \frac{\mathrm{d}s}{I} = \frac{1}{I} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} R^3 \sin^2 \theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{8\pi - 3\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{R^3}{I} = 1{,}662 \frac{R^3}{I}$$

$$J_y = J_Y = \int X^2 \frac{\mathrm{d}s}{I} = \frac{1}{I} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} R^3 \cos^2 \theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{R^3}{I} = 2{,}527 \frac{R^3}{I}$$

iar momentul de inerţie J_x se scrie :

$$J_x = J_X - \widetilde{m}\, O\, D^2 = \frac{\pi(8\pi - 3\sqrt{3}) - 12}{12\,\pi} \cdot \frac{R^3}{I} = 1{,}344 \frac{R^3}{I}$$

Mai rezultă

$$x_c^* = OC \sin 30^\circ = \frac{2R}{3\pi} = 0{,}212\ R$$

$$y_c^* = OC \cos 30^\circ - OD = \frac{2R\sqrt{3}}{3\pi} - \frac{R\sqrt{3}}{2\pi} = \frac{R\sqrt{3}}{6\pi} = 0{,}092\ R$$

$$m = \frac{\pi R}{I}$$

şi se obţin din relaţiile (15) reacţiunile :

$$F_{BX} = X_1 = -\frac{\frac{\pi R}{I}}{1{,}344 \frac{R^3}{I}} \cdot 0{,}092\ M_0 R = -0{,}215 \frac{M_0}{R}$$

$$F_{BY} = X_2 = \frac{\frac{\pi R}{I}}{2{,}527 \frac{R^3}{I}} \cdot 0{,}212 R\ M_0 = 0{,}263 \frac{M_0}{R}$$

$$X_3 = -\frac{\frac{\pi R}{I}}{\frac{4\pi R}{3I}} M_0 = -0{,}75\ M_0$$

Coordonatele punctului B sînt $x_B = 0{,}866\ R$; $y_B = -0{,}776\ R$ și din relația (17) se obține momentul din punctul B.

$$M_B = (-0{,}75 - 0{,}263 \cdot 0{,}866 + 0{,}215 \cdot 0{,}776)\ M_0 = -0{,}81\ M_0$$

b) Pentru cadrul din figura 7.a să se ridice nedeterminarea cu ajutorul centrului elastic.

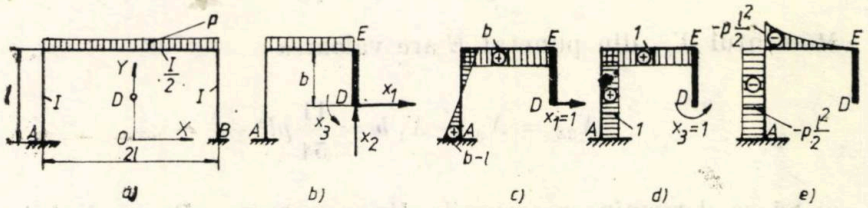


Fig. 7 — Cadru simetric. Diagramele de momente

Cadrul fiind simetric, cu încărcarea simetrică, se consideră forma de bază din fig. 7.b și aplicînd relațiile (22) rezultă:

$$X_1 = -\frac{\Delta'_{10}}{\delta'_{11}}\ ;\quad X_2 = 0\ ;\quad X_3 = -\frac{\Delta'_{30}}{\delta'_{33}}$$

Ordonata Y_D a centrului elastic D se calculează cu relația,

$$Y_D = \frac{\Sigma\, m_i Y_i}{\Sigma\, m_i} = \frac{\dfrac{l}{I}\cdot\dfrac{l}{2}\cdot + \dfrac{l}{I}\cdot\dfrac{l}{2} + \dfrac{4l^2}{I}}{\dfrac{l}{I} + \dfrac{l}{I} + \dfrac{4l}{I}} = \frac{5l}{6}$$

și rezultă (fig. 7.b).

$$b = \frac{l}{6}$$

Pe baza diagramelor de momente din fig. 7.c, d, e, rezultă,

$$\delta'_{11} = \frac{1}{3EI}\,[6\,b^2 l + (l-b)^3 + b^3] = \frac{l^3}{4EI}$$

$$\delta'_{33} = \frac{2}{EI}\,l + \frac{1}{EI}\,l = \frac{3l}{EI}$$

$$\Delta'_{10} = -\frac{2}{EI}\int_0^l p\,\frac{x^2}{2}\,b\,\mathrm{d}x + \frac{1}{EI}\int_0^l p\,\frac{l^2}{2}\,(x-b)\,\mathrm{d}x = \frac{pl^4}{9\,EI}$$

$$\Delta'_{30} = -\frac{2}{EI}\int_0^l p\,\frac{x^2}{2}\,dx - \frac{1}{EI}\int_0^l p\,\frac{l^2}{2}\,dx = -\frac{5\,pl^3}{6\,EI}$$

și se obțin componentele :

$$X_1 = -\frac{4}{9}pl\,; \quad X_3 = \frac{5}{18}pl^2$$

Momentul X_{3E} din punctul E are valoarea

$$X_{3E} = X_3 + X_1\,b = \frac{11}{54}pl^2$$

c) Să se determine reacțiunile din încastrarea B a cadrului nesimetric din fig. 8.a.

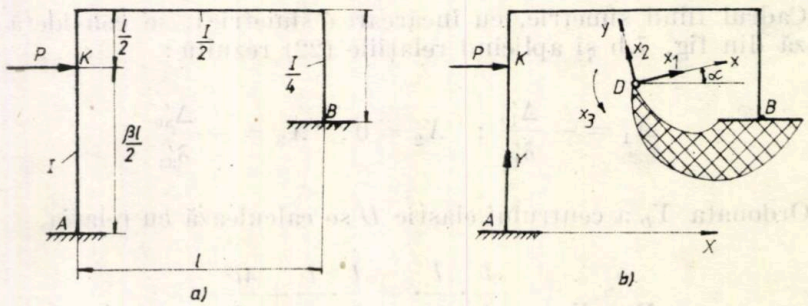


Fig. 8 — Cadru nesimetric. Alegerea sistemului de bază

Coordonatele centrului elastic față de sistemul OXY (fig. 8.b) se exprimă sub forma :

$$X_D = \frac{\Sigma\, m_i X_i}{\Sigma\, m_i} = \frac{\frac{2l}{I}\cdot 0 + \frac{2l}{I}\,\frac{l}{2} + \frac{4l}{I}\cdot l}{\frac{2l}{I} + \frac{2l}{I} + \frac{4l}{I}} = \frac{5}{8}\,l$$

$$Y_D = \frac{\Sigma m_i Y_i}{\Sigma m_i} = \frac{\frac{2l}{I}\,l + \frac{2l}{I}\,2l + \frac{4l}{I}\,\frac{3l}{2}}{\frac{2l}{I} + \frac{2l}{I} + \frac{4l}{I}} = \frac{3}{2}\,l$$

Momentele de inerție mecanice ale barei echivalente $A\,K\,B$ față de axele AX, AY, sînt,

$$J_X = 20\,\frac{l^3}{I}\;; \quad J_Y = \frac{14}{3}\,\frac{l^3}{I}\;; \quad J_{XY} = 8\,\frac{l^3}{I}$$

și rezultă :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{J_{XY} - \widetilde{m}\, X_D Y_D}{J_X + J_Y - \widetilde{m}(X_D^2 + Y_D^2)} = -$$

$$- \frac{8\,\dfrac{l^3}{I} - \dfrac{8l}{I}\,\dfrac{5l}{8}\,\dfrac{3l}{2}}{\dfrac{74}{3}\,\dfrac{l^3}{I} - \dfrac{8l}{I}\left(\dfrac{25}{64}\,l^2 + \dfrac{9}{4}\,l^2\right)} = -\frac{12}{85}$$

$$\alpha = -\,4{,}015^\circ$$

Din relațiile (42) — (46)

$$J_1 = \frac{85}{48}\,\frac{l^3}{I}\;;\quad J_2 = \frac{11}{48}\,\frac{l^3}{I}\;;\quad J_3 = \frac{12}{48}\,\frac{l^3}{I}\;;$$

$$J_x = 2{,}033\,\frac{l^3}{I}\;;\quad J_y = 1{,}509\,\frac{l^3}{I}$$

și rezultă :

$$\delta_{11} = 2{,}033\,\frac{l^3}{EI}\;;\quad \delta_{22} = 1{,}509\,\frac{l^3}{EI}$$

În continuare, cu relațiile (31)—(40), (27)—(31) rezultă :

$$m^* = \frac{3}{2}\,\frac{l}{I}\;;\quad X_c^* = 0\;;\quad Y_c^* = \frac{3l}{4}\;;\quad x_c^* = -\,0{,}571\,l\;;\quad y_c^* = -\,0{,}792\,l$$

$$J_X^* = 1{,}125\,\frac{l^3}{I}\;;\quad J_Y^* = J_{XY}^* = 0\;;\quad J_1^* = 1{,}84\,\frac{l^3}{I}\;;$$

$$J_2^* = 0{,}27\,\frac{l^3}{I}\;;\quad J_3 = 0{,}35\,\frac{l^3}{I}$$

$$J_x^* = 2{,}156\,\frac{l^3}{I}\;;\quad J_y^* = 1{,}524\,\frac{l^3}{I}\;;\quad J_{xy}^* = 0{,}309\,\frac{l^3}{I}$$

$$P_x = 0{,}9975\;P\;;\quad P_y = 0{,}07\;P\;;\quad M_D^* = 0\;;\quad M_C^* = -\,\frac{3}{4}\,Pl$$

$$\Delta_{10} = 2{,}129\,\frac{Pl^3}{EI}\;;\quad \Delta_{20} = -\,0{,}202\,\frac{Pl^3}{3\,EI}\;;\quad \Delta_{30} = -\,1{,}125\,\frac{Pl^2}{EI}$$

și din relațiile (15) se obțin componentele :

$$X_1 = -1{,}048\ P;\ X_2 = -0{,}134\ P;\ X_3 = -0{,}141\ P$$

Reacțiunea din B are componentele pe axele D_x, D_y

$$X_{1B} = X_1;\quad X_{2B} = X_2$$

Pentru determinarea momentului din punctul B se calculează coordonatele x_B, y_B, cu relațiile (12) și rezultă,

$$x_B = 0{,}409\ l,\quad y_B = -0{,}4725\ l$$

și din relația (17) se obține

$$X_{3B} = 0{,}409\ Pl$$

6. Concluzii

Metoda centrului elastic, stabilită pe baza proprietăților centrului elastic, se utilizează în calculul sistemelor hiperstatice, fără articulații, cu un singur contur.

Prin aplicarea acestei metode se evită rezolvarea unor sisteme de ecuații cu trei necunoscute și se evidențiază influența geometriei maselor echivalente asupra intensităților reacțiunilor.

Exemplele tratate în lucrare arată modul practic în care trebuie să se aplice această metodă.

BIBLIOGRAFIE

1. *V. Dolga*, Centrul elastic al unui mecanism cu cuple cinematice elastice, Simpozionul național de roboți industriali, Partea I, pg. 165—172, București, 1985.
2. *M. C. Harris, E. Ch. Crede*, Șocuri și vibrații, vol. I, II, III, Edit. tehnică, București, 1968
3. *P. Mazilu, N. Posea, E. Iordăchescu*, Probleme de rezistența materialelor, vol. II, Edit. tehnică, București, 1975.
4. *N. Pandrea, M. Pandrea*, Calculul eforturilor și deplasărilor în sisteme hibride cu ajutorul teoriei șuruburilor, Simpozionul „Creația tehnică și fiabilitatea în construcția de mașini", Vol. Mecanica, pg. 97—109, Iași, 1983.
5. *N. Pandrea, Emil Perianu*, Metoda deplasărilor relative în calculul elastic al mecanismelor de complianță R C C, Simpozionul național de roboți industriali, Partea II, pg. 557—565, București, 1985.
6. * * * Lexiconul tehnic român, vol. 4, Edit. tehnică, București, 1958.

Considérations sur la méthode de centre élastique

Dans cet ouvrage on se sert du centre élastique et de ses propriétés pour le calcul des systèmes plans statiquement nondéterminés. A cet effet, il y est démontré que le problème de l'enlèvement des non-déterminations dans des systèmes plans à contours uniques est ramené à un calcul de géométrie des masses respectivement au calcul des directions et des moments mécaniques principaux et centraux d'inertie de la barre équivalente, géométriquement identique à la barre donnée mais ayant la densité du point de vue numérique égale à l'inverse du moment géométrique axial.

C.Z. : 621.567
621.752

AMORTIZOR PNEUMATIC LINIAR

P. V. MARINESCU *

Lucrarea de față se ocupă cu studiul amortizării mișcării unui oscilator pneumatic liniar în prezența unei camere pneumatice adiționale. În acest scop se stabilește ecuația de mișcare a oscilatorului în prezența camerei adiționale și se trasează locul rădăcinilor ecuației caracteristice în funcție de parametrii care caracterizează sistemul considerat. Deoarece prezența camerei adiționale amortizează mișcarea oscilatorului, se determină factorul de amortizare maxim în funcție de parametrii adimensionali ai sistemului. Rezultatele obținute pot sta la baza proiectării unui oscilator pneumatic amortizat de tipul celui studiat.

1. Introducere

Se consideră amortizorul pneumatic din figura 1 format din pistonul (1), cilindrul (2) umplut cu aer, camera adițională (3) și masa m_p atașată pistonului. Scoțind pistonul din poziția de echilibru, aerul închis în cilindru va avea volumul V și presiunea P, în timp ce presiunea în camera adițională de volum V_c va fi P_c. În absența frecării între piston și cilindru, mișcarea oscilatorie a pistonului se va amortiza datorită camerei adiționale așa după cum se va arăta în continuare.

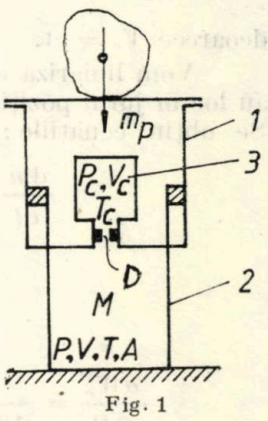


Fig. 1

2. Ecuațiile de mișcare

Într-o poziție oarecare a pistonului, între masa aerului aflată la presiunea P, volumul V și temperatura T există relația dată de ecuația de stare

$$M = \frac{PV}{RT} \qquad (1)$$

în care R este constanta gazului.

Considerînd o evoluție a aerului de tipul

$$\frac{P^{\frac{n-1}{n}}}{T} = \text{ct.} \qquad (2)$$

* Șef lucrări dr. ing., catedra Aeronave

în care exponentul politropic poate lua valori cuprinse între $n=1\div1,4$, se deduce prin transformarea ecuației (1), variația în timp a masei conținute în cilindru sub forma

$$\frac{dM}{dt} = \frac{P}{RT}\frac{dV}{dt} + \frac{V}{nRT}\frac{dP}{dt} \tag{3}$$

Pe de altă parte variația în timp a masei de aer conținută în volumul V este egală cu debitul de aer care curge prin orificiul dintre cele două volume considerat capilar și deci

$$\frac{dM}{dt} = -W_c = -\frac{\pi D^2}{128\,\mu RT}\frac{P^2 - P_c^2}{2L} \tag{4}$$

în care D și L sînt diametrul și respectiv lungimea orificiului, iar μ viscozitatea absolută a aerului.

Ecuațiile (3) și (4) asociate conduc la relația

$$\frac{P}{RT}\frac{dV}{dt} + \frac{V}{nRT}\frac{dP}{dt} = -W_c \tag{5}$$

Pentru camera adițională se poate scrie o relație asemănătoare ecuației (5)

$$\frac{V_c}{nRT_c}\frac{dP_c}{dt} = W_c \tag{6}$$

deoarece $V_c = \text{ct.}$

Vom liniariza ecuațiile precedente admițînd că oscilațiile pistonului au loc în jurul poziției de echilibru notată cu indicele '0', pe o distanță x. Se obțin ecuațiile :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{P_0}{RT_0}\frac{dv}{dt} + \frac{V_0}{nRT_0}\frac{dp}{dt} = -w_c \tag{7}$$

$$w_c = \frac{\partial W_c}{\partial P}p + \frac{\partial W_c}{\partial p_c}p_c \tag{8}$$

$$\frac{\partial W_c}{\partial P} = \frac{\pi D^2}{128\,\mu RT_0}\frac{P_0}{L}; \qquad \frac{\partial W_c}{\partial P_c} = \frac{\pi D^4}{128\,\mu RT_0}\frac{P_{c_0}}{L} \tag{9}$$

$$\frac{V_{c_0}}{nRT_{c_0}}\frac{dP_c}{dt} = \frac{\partial W_c}{\partial P_c}p + \frac{\partial W_c}{\partial P_c}p_c, \qquad P_0 = P_{c_0} \tag{10}$$

$$v = -Ax, \qquad \frac{\partial W_c}{\partial P} = -\frac{\partial W_c}{\partial P_c} \tag{11}$$

În urma combinării ecuațiilor (7÷11) se obține ecuația

$$[(1 + \tau s)(1 + \tau_c s) - 1]p = -\frac{nP_0}{V_0}\tau s(1 + \tau_c s)v \tag{12}$$

în care s-a introdus operatorul s pentru d/dt și s-a notat

$$\tau = \frac{V_0}{nRT_0\,\partial W_c/\partial P}, \tag{13}$$

$$\tau_c = -\frac{V_{c0}}{nRT_{c_0}\partial W_c/\partial P_c}, \quad \frac{\partial W_c}{\partial P_c} < 0 \tag{14}$$

Ecuația de mișcare a pistonului în cazul mai general în care se consideră acțiunea unei forțe elastice kX și a unei forțe de frecare $c\dot{X}$ este

$$m_p\ddot{X} + c\dot{X} + kX = m_p g - PA \tag{15}$$

sau în urma liniarizării

$$m_p\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -pA \tag{16}$$

Eliminînd presiunea p din cele două ecuații, (12) și (16) și notînd

$$k_p = \frac{nP_0A^2}{V_0} \tag{17}$$

constanta arcului pneumatic, se obține în cele din urmă ecuația

$$(k + cs + m_p s^2) + \frac{\tau}{\tau_c}(1 + \tau_c s)(k + k_p + cs + m_p s^2) = 0 \tag{18}$$

Mai departe, notînd

$$\frac{\tau}{\tau_c} = \frac{V_0}{V_{c_0}}\frac{T_0}{T} = \frac{\bar{V}}{\bar{V}_c} \tag{19}$$

cu ω_n pulsația proprie a pistonului și cu ζ_1 factorul de amortizare, date de relațiile

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}}, \qquad \zeta_1 = \frac{c}{2}\sqrt{km_p}$$

ecuaţia (18) devine

$$1+\frac{2\zeta_1}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{\bar{V}}{\bar{V}_c}(1+\tau_c s)\left(1+\frac{k_p}{k}+\frac{2\xi_1}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2\right)=0 \tag{20}$$

Ecuaţia precedentă conţine parametrii $\bar{V}/\bar{V}_c$, τ_c, $(1+k_p/k)$, ζ_1, ω_n, care influenţează amortizarea sistemului considerat. Vom căuta în continuare să găsim influenţa lor asupra amortizării în absenţa amortizării mecanice şi deci pentru $c=0$. În acest scop să notăm cu

$$a=\bar{V}/\bar{V}_c, \qquad \bar{s}=s/\omega_n \tag{21}$$

$$\bar{\tau}_c=\omega_n\tau_c, \qquad b=1+k_p/k$$

Rezultă ecuaţia

$$a\bar{\tau}_c\bar{s}^3+(1+a)\bar{s}^2+ab\bar{\tau}_c\bar{s}+1+ab=0 \tag{22}$$

Vom determina locul rădăcinilor ecuaţiei (22) în planul complex $\bar{s}=\bar{\sigma}+j\bar{\omega}$. Pentru aceasta se poate considera o rădăcină reală $\bar{s}=-\alpha$, $(\alpha>0)$. Celelalte două rădăcini imaginare vor fi date de ecuaţia

$$a\bar{\tau}_c\bar{s}^2+(1+a-a\alpha\bar{\tau}_c)\bar{s}+a\alpha^2\bar{\tau}_c-\alpha(1+a)+ab\bar{\tau}_c=0 \tag{23}$$

În urma rezolvării ecuaţiei (23) se obţin rădăcinile $\bar{s}_{1,2}=\bar{\sigma}\pm j\bar{\omega}$ în care

$$\bar{\sigma}=-\frac{a(1-\alpha\bar{\tau}_c)+1}{2a\bar{\tau}_c}, \qquad \bar{\sigma}<0 \tag{24}$$

$$\bar{\omega}=\frac{[4a\bar{\tau}_c(a\alpha^2\bar{\tau}_c-\alpha-a\alpha+ab\bar{\tau}_c)-(1+a-\alpha a\bar{\tau}_c)^2]^{1/2}}{2a\bar{\tau}_c} \tag{25}$$

Pentru rădăcina reală considerată rezultă

$$a=-\frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha\bar{\tau}_c)(b+\alpha^2)}, \qquad \alpha>\frac{1}{\bar{\tau}_c} \tag{26}$$

Ecuaţiile (24) şi (25) fixează locul rădăcinilor în semiplanul complex $\omega>0$. În plus, pentru $\bar{V}_c/\bar{V}=0$, din ecuaţia (20) rezultă

$$\bar{s}=-1/\bar{\tau}_c, \qquad \bar{s}=\pm j(1+k_p/k)$$

ar pentru $$\bar{V}_c/\bar{V}=\infty, \quad \bar{s}=\pm j$$

Ecuațiile (24) și (25) pot fi scrise direct funcție de α. Ținînd seama de ecuația (26) se obține astfel

$$\bar{\sigma} = \frac{b-1}{2\bar{\tau}_c} \frac{1-\alpha\bar{\tau}_c}{1+\alpha^2} \tag{27}$$

$$\bar{\omega} = \sqrt{b + \frac{(1-b)(\alpha\bar{\tau}_c - 1)}{4\bar{\tau}_c^2(1+\alpha^2)^2}[4\alpha^3\bar{\tau}_c + \alpha\bar{\tau}_c(3+b) + 1 - b]} \tag{28}$$

Să observăm că există o valoare a lui α pentru care în planul complex partea reală a rădăcinilor $\bar{s}_{1,2}$ are o valoare limită inferioară.

Într-adevăr, pentru $d\bar{\sigma}/d\alpha = 0$ din ecuația (27) se obține pentru α expresia

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + \bar{\tau}_c^2}}{\bar{\tau}_c} \tag{29}$$

și deci în urma înlocuirii în ecuația (27), vom avea

$$\bar{\tau}_{min} = \frac{b-1}{4\bar{\tau}_c}(1 - \sqrt{1 + \bar{\tau}_c^2}) \tag{30}$$

Întrucît coeficientul de amortizare al sistemului este dat de relația

$$\zeta = -\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{\bar{\sigma}^2 + \bar{\omega}^2}} = \frac{(1-b)(1-\bar{\tau}_c\alpha)}{\sqrt{4\bar{\tau}_c^2(1+\alpha^2)(\bar{\tau}_c\alpha^2 - \alpha + \alpha b + b\bar{\tau}_c)}} \tag{31}$$

se poate determina mărimea rădăcinii $-\alpha$ pentru care valoarea acestui coeficient este maximă. Pentru $d\zeta/d\alpha = 0$ rezultă ecuația

$$2\bar{\tau}_c^2\alpha^4 + (b-5)\bar{\tau}_c\alpha^3 + 3(1-b)\alpha^2 - (3b+1)\bar{\tau}_c\alpha + 1 - b - 2b\bar{\tau}_c^2 = 0 \tag{32}$$

care rezolvată dă valoarea lui α, ($\alpha > 0$). Utilizînd apoi ecuația (31) se obține valoarea maximă a coeficientului de amortizare.

Pentru a pune în evidență amortizarea produsă în sistem datorită camerei adiționale, în absența frecării și a forței elastice ($c = 0$, $k = 0$) vom simplifica ecuația (20), care devine acum

$$1 + \frac{s^2}{\omega_n'^2} + \frac{\bar{V}}{\bar{V}_c}\left(1 + \bar{\tau}_c\frac{s}{\omega_n'}\right)\left(1 + \frac{s^2}{\omega_n'^2}\right) = 0 \tag{33}$$

în care $\omega_n'^2 = k_p/m$. Urmînd aceeași cale ca în cazul precedent, considerînd rădăcina reală $\bar{s} = -\alpha$, se găsește

$$a = -\frac{\alpha^2}{(1-\bar{\tau}_c\alpha)(1+\alpha^2)} \tag{34}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2\bar{\tau}_c} \frac{1 - \alpha\bar{\tau}_c}{\alpha^2} \tag{35}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\sqrt{4\bar{\tau}_c\,\alpha^3 + (1 - \alpha\bar{\tau}_c)^2}}{2\bar{\tau}_c\,\alpha^2} \tag{36}$$

și deci se poate trasa locul rădăcinilor în planul complex.

Valoarea minimă a lui $\bar{\sigma}$ se găsește pentru $d\bar{\sigma}/d\alpha = 0$, utilizînd ecuația (35). În urma calculelor rezultă $\alpha = 2/\bar{\tau}_c$ și deci

$$\bar{\sigma}_{min} = -\bar{\tau}_c/8 \tag{37}$$

Coeficientul de amortizare calculat cu ajutorul ecuației (31) are expresia

$$\zeta = -\frac{1 - \alpha\bar{\tau}_c}{2\alpha\sqrt{\alpha\bar{\tau}_c}} \tag{38}$$

Coeficientul de amortizare maximă corespunde unei valori a lui α pentru care $d\zeta/d\alpha = 0$. Se obține $\alpha = 3/\bar{\tau}_c$ și

$$\zeta_{max} = \frac{\sqrt{3}}{9}\bar{\tau}_c \tag{39}$$

Prin urmare, amortizarea maximă care se poate obține pentru sistemul considerat cu cameră adițională se poate calcula cu ajutorul ecuației (39).

3. Rezultate și concluzii

Cu ajutorul ecuațiilor (22) și (35) se poate trasa rădăcinilor în semiplanul complex $s = \sigma + j\omega$, și determina factorul de amortizare ζ în absența frecărilor ($c = 0$). În fig. 2 este trasat locul rădăcinilor ecuației (22) în cazul în care $b = 4$; 6,25; 9 și $\bar{\tau}_c = 0{,}5$; 1; 1,5; pentru diferite valori ale parametrului a. Există o valoare a parametrului a pentru care factorul de amortizare devine maxim. În tabelul 1 se dă valoarea factorului de amortizare maxim în funcție de parametrii $\bar{\tau}_c$ și b. Se observă creșterea valorii maxime a amortizării în funcție de $\bar{\tau}_c$ pentru o valoare dată lui b.

De asemenea, amortizarea sistemului crește odată cu creșterea lui b, pentru o valoare dată lui $\bar{\tau}_c$. Prin urmare, mărirea volumului camerei adiționale are drept consecință creșterea factorului de amortizare maxim al sistemului pentru un volum inițial dat al aerului închis în cilindru.

Dacă volumul camerei adiționale este păstrat constant, amortizarea maximă va crește, odată cu mărirea constantei arcului pneumatic, deci cu mărirea presiunii interioare a aerului în cilindru sau cu micșorarea volumului inițial al acestuia.

ω̄
3
2,5
2
1,5
1
b=9
1,5
1
0,5
σ̄c=0,5
σ̄
0,5
1
1,5
ω̄
2,5
2
1,5
1
b=6,25
0,5
1
σ̄c=1,5
σ̄
0,5
1
ω̄
2
1,5
1
b=4
0,5
1
σ̄c=1,5
σ̄
0,5

Fig. 2

Tabelul 1

Valorile lui τ_{max}

b \ $\bar{\tau}_c$	0,5	1	1,5
4	0,1151	0,2022	0,2617
6,25	0,1693	0,2985	0,3877
9	0,2220	0,3921	0,5100

În concluzie, eficacitatea camerii adiționale din punct de vedere al măririi amortizării maxime a sistemului, crește cu mărirea raportului dintre volumul acesteia și volumul aerului camerei de bază. Acest fapt reiese din tabelul 2.

În cazul în care nu există frecare în sistem și în lipsa unei forțe elastice ($c = 0$, $k = 0$) aerul din cavitatea cilindrului se comportă ca

Tabelul 2

Valorile $\bar{V}/\bar{V}_c$ corespunzătoare lui $\bar{\zeta}_{max}$

b \ $\bar{\xi}$	0,6	1	1,5
4	0,5802	0,3972	0,2852
6,25	0,5026	0,3139	0,2107
9	0,4452	0,2601	0,1688

Tabelul 3

$\bar{\tau}$	0,5	1	1,5
ζ_{max}	0,0962	0,1924	0,2886
$\bar{V}/\bar{V}_c$	0,4686	0,45	0,4

un arc pneumatic. Sistemul va avea o pulsație proprie cu ω_n'. Locul rădăcinilor ecuației (33) în semiplanul complex este dat în figura 3. Factorul de amortizare maximă depinde de parametrii $\bar{\tau}_c$ și $\bar{V}/\bar{V}_c$. Cîteva valori sînt date în tabelul 3 (ec. 34 și 39).

Și în acest caz se observă o mărire a factorului de amortizare maxim în funcție de parametru $\bar{\tau}_c$ și deci odată cu mărirea volumului camerei adiționale.

În consecinţă se observă că o cameră adiţională aplicată unui oscilator pneumatic are rol de amortizor.

În funcţie de dimensiunile acesteia raportate la dimensiunile camerei pneumatice a oscilatorului se poate obţine factorul de amortizare dorit.

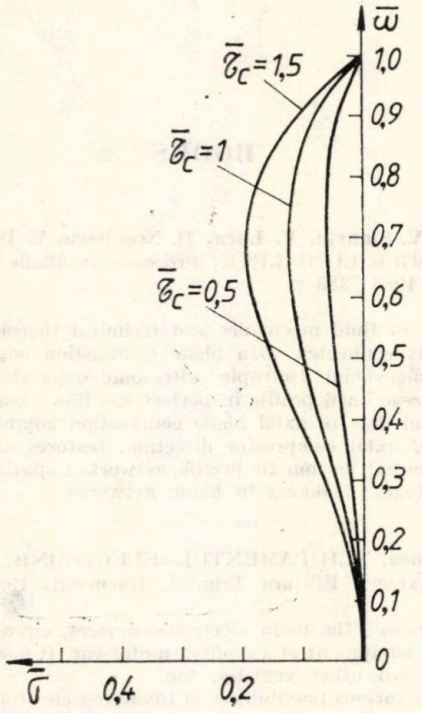


Fig. 3

BIBLIOGRAFIE

1. *B. W. Andersen*, The Analysis and Design of Pneumatic Systems, John Wiley & Sons, Inc., 1967.

On a Linear Pneumatic Dampers

In the present paper a linear pneumatic damper is studied.

This damper is a linear pneumatic oscillator having an auxiliary chamber commonly called as a plenum chamber. This allows the gas to flow into and out of the chamber to dissipate energy without loss of gas.

The root-locus of the characteristic equation are discussed in detail for several values of system parameters. The results are plotted in the complex plane with $j\omega$ as ordinate and σ as abscissa. The damping ratio as a function of the parameters of the system is also determinated.

BOOKS

V. Pimsner, C. Berbente, V. Stanciu, V. Luca, D. Negulescu, V. Dobrin, C. Tătăranu, PROCESE ÎN MAŞINI TERMICE CU PALETE/ Processes in Blade Combustion Engines, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986, 383 p.

Founded on fundamentals of fluid mechanics and technical thermodynamics, this book presents the following aspects connected with blade combustion engines : unidimensional flow under steady state; bidimensional isotropic ultrasonic expansion of perfect gases; shock waves in perfect gases; streamlined profile in perfect gas flow; boundary layer; kinetics and dynamics of unidimensional flow in axial blade combustion engines; features of mono-stage axial turbines; features of axial compressor direction, features of radial-and axial — radial stages; bidimensional potential motion in profile networks; spatial flow through blade networks, configuration of stages; leakages in blade networks.

N. Drăgulănescu, M. Ciuca, ECHIPAMENTUL ELECTRONIC AL AUTOMOBILULUI/ Automotive Electronic Systems, Editura Tehnică, Bucureşti, 1987, 319 p.

This work is meant to present the main electronic devices, circuits, apparatus and systems belonging to the electronic equipment of a modern motor-car. It goes without saying that these types of systems can fit out other vehicles, too.
The authors emphasize the various possibilities of involving electronics into automotive performance, exploitation, maintenance and service, not insisting on electrical aspects.
Most diagrams are provided with Romanian electric and electronic components which are available for amateur electronists who wish to fit out their own cars with some of the electronic devices and apparatus presented in this book.

Actes de la Journée d'Etudes

„CARBURANTS ET MOTEURS DES VEHICULES DE L'AN 2000"

Publiés par la Société Belge des Mécaniciens. Sujets :
Synergie moteur-carburant, par le Prof. Martin; UCL, Louvain-la-Neuve. The options for diesel fuel in the year 2000, by R. C. Hutcheson, U. K. Caractéristiques des essences futures, par J. Vaerman, Bruxelles. Influence des combustibles diesel sur le fonctionnement des moteurs, par M. Campinne, Bruxelles. Oil for the year 2000, by R. Robson, U. K. Développement de l'électronique appliquée aux moteurs, par M. Jacques, France. Mechanical supercharging for gasoil and diesel engines, by H. A. Huck, VW, DBR. Trends in vehicle exhaust emission catalysts, by P. J. Emmel, Johnson Mattney, U.K. An overview of worldwide vehicle exhaust emission legislation, by M. W. Rush, and R. J. Larbey, U.K.

I. P. Informaţia, comanda 1781

40.480

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
ELECTROTEHNICA, ENERGETICA, AUTOMATICA-CALCULATOARE, ELECTRONICA, MECANICA, CONSTRUCŢII DE MAŞINI TRANSPORTURI-AERONAVE, CHIMIE, METALURGIE

apare în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physiques pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" şi „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din institut. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa privind articolele, schimburile de publicaţii şi abonamentele se fac pe adresa institutului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
ЭЛЕКТРОТЕХНИКА, ЭНЕРГЕТИКА, АВТОМАТИКА-СЧЕТНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ, ЭЛЕКТРОНИКА, МЕХАНИКА, МАШИНОСТРОЕНИЕ, ТРАНСПОРТ–САМОЛЕТОСТРОЕНИЕ ХИМИЯ, МЕТАЛУРГИЯ

продолжает прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" и „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Составленный на новых основах он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут опубликоваться и научно-исследовательские работы специалистов извне.

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адресу института.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
ELECTROTECHNICS, ENERGETICS, AUTOMATIC CONTROL-COMPUTERS, ELECTRONICS, MECHANICS, MACHINE BUILDING, TRANSPORT-AERONAUTICS, CHEMISTRY, METALLURGY

The Bulletin continues the old scientific periodicals : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" and „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from Institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondance regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the following address.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
ELECTROTECHNIQUE, ENERGETIQUE, AUTOMATIQUE-ORDINATEURS, ELECTRONIQUE, MECANIQUE, CONSTRUCTIONS MECANIQUES, TRANSPORTS-AERONAUTIQUE, CHIMIE, METALLURGIE

continue les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" et „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'Institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnements est :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
ROMÂNIA

Splaiul Independenţei nr. 313
Căsuţa Poştală nr. 2356

Lei 35